Г. И. ЗУБЕЛЕВИЧ
СБОРНИК ЗАДАЧ
МОСКОВСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Г. И. ЗУБЕЛЕВИЧ

СБОРНИК ЗАДАЧ МОСКОВСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

(с решениями)

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ 5—8 КЛАССОВ

Под редакцией *К. П. Сикорского*

Издание 2-е, переработанное

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
МОСКВА 1971

51(07)
З 91

Зубелевич Г. И.

З-91 Сборник задач московских математических олимпиад (с решениями). Пособие для учителей 5—8 классов. Под редакцией К. П. Сикорского, изд. 2-е, переработ. М., «Просвещение».

304 с. с илл.

Сборник содержит задачи, предлагавшиеся на математических олимпиадах, которые проводит Московский институт усовершенствования учителей для учащихся V—VII классов, и задачи для учащихся VIII классов, составленные автором и частично заимствованные.

Составленный из задач несколько повышенной трудности, сборник может служить хорошим пособием для подготовки к олимпиадам и для занятий в математических кружках.

6-5
328-70

51(07)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

V класс

I. Примеры 5
II. Делимость чисел 9
III. Метрическая система мер в задачах 11
IV. Задачи на части 12
V. Задачи на движение 14
VI. Задачи на работу 21
VII. Разные задачи 22

V—VI класс

Арифметика

I. Задачи на совместную работу 28
II. Задачи на движение 29
III. Решить уравнения 31
IV. Задачи на проценты 32
V. Задачи на части 36
VI. Разные задачи 37

Алгебра

I. Задачи на вычисление 41
II. Задачи на доказательство 43
III Общий раздел 45

Геометрия

I. Задачи на вычисление 47
II. Задачи на доказательство 48
III. Задачи на построение 50

VII класс

Алгебра

I. Разложение на множители, сокращение дробей 53
II. Составление уравнений и их решение . . . . —
III. Составление систем уравнений и их решение . 58
IV. Задачи на доказательство 60
V. Разное 61

Геометрия

I. Задачи на вычисление 63
II. Задачи на построение 64
III. Задачи на доказательство 67

VIII класс

Алгебра

I. Задачи на составление уравнений 71
II. Теорема Виета 76
III. Радикалы 77
IV. Уравнения и системы уравнений 79
V. Графики 81
VI. Разное . . . . . —

Геометрия

I. Замечательные точки и линии в треугольниках 84
II. Подобие треугольников 86
III. Метрические соотношения в треугольнике и круге 88
IV. Разные задачи 89

Решения и ответы 92

ПРЕДИСЛОВИЕ

В целях развития у учащихся интереса к математике во многих городах и сельских местностях проводятся математические олимпиады: школьные, районные, городские, областные.

Если разрешить участвовать в этих олимпиадах учащимся, не прошедшим должной подготовки в школе под руководством учителя или самостоятельно, то нередко после неудач они не только не заинтересовываются математикой, но, напротив, часто теряют веру в свои силы и вряд ли скоро возьмутся за решение трудных и даже просто занимательных задач.

Поэтому очень важно организовать для учащихся, наиболее интересующихся математикой, в школе или в объединении нескольких школ математические кружки, чтение лекций учителями, научными работниками ближайших высших учебных заведений и исследовательских институтов и инженерами предприятий. Экскурсии на выставки, на предприятия, где в той или иной степени удастся показать практическое применение математики, также будут способствовать повышению интереса к занятиям математикой.

На кружковых занятиях основной целью следует считать решение интересных и оригинальных задач, расширяющих и углубляющих знания учащихся, получаемых на уроках. Однако каждая задача, особенно на первых занятиях кружка, не должна содержать нагромождения многих трудностей логического, смыслового и вычислительного характера. В противном случае у учащихся очень быстро пропадет интерес к математике. Если же умело поддерживать любознательность учеников, предлагая им задачи, соответствующие их знаниям, помогая в необходимых случаях, то это привьет им вкус к самостоятельному мышлению и поможет развитию их математических способностей.

Предлагаемый сборник, по замыслу автора, может служить первым шагом для перехода от упражнений и задач школьных задачников к задачам повышенной трудности. Решение их возможно на основании тех знаний, которые дают школьные программы по арифметике, алгебре и геометрии в IV—VIII классах.

В сборнике имеются сходные по содержанию задачи с постепенным усложнением их условия; такие задачи могут рассматриваться как тренировочные.

Сборник содержит более 800 задач (с решениями и ответами), которые в большей своей части предлагались на ежегодных математических олимпиадах, организуемых с 1949 года Московским

городским институтом усовершенствования учителей для учащихся V—VII классов, а с 1963 года и VIII класса. Собрать эти задачи помогли автору работники кабинета математики МГИУУ, которым автор приносит свою благодарность.

Частично в сборник включены задачи и из различных других задачников.

Задачи в сборнике распределены по классам, предметам и отдельным «типам». Распределение задач по «типам» во многих случаях очень условное, оно исходит из существующей практики.

Решение арифметических задач часто сопровождается в настоящем сборнике геометрической иллюстрацией. Построение графиков движения в ряде случаев помогло наглядно показать решение таких задач, которые часто оказываются трудными для учащихся.

Однако выбор методов решения большинства задач определялся программой соответствующего класса. Многие арифметические задачи решены или двумя способами (арифметическим и способом составления уравнения), или одним из них. Считаем, что арифметический способ решения задач весьма полезен, он во многом способствует развитию математического мышления, хотя не всегда является обязательным, способ же решения задач составлением уравнений является обязательным, так как предусмотрен действующей программой.

Автор надеется, что настоящий сборник окажет помощь учителям математики и прежде всего начинающим работать в школе при организации кружковой работы в IV—VIII классах.

Подробные решения большинства задач, по мысли автора, помогают тем учащимся, которые будут самостоятельно, без помощи учителя, пользоваться сборником.

Критические замечания и пожелания по содержанию сборника автор просит направлять по адресу: Москва, 129846, ГСП-18, 3-й проезд Марьиной рощи, 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

Автор

V

КЛАСС[1]

I. Примеры

а) Решить уравнения:

1. $1-\left[\left(3\frac{5}{14}-\frac{1\frac{11}{49}}{x\cdot\frac{25}{38}-47\frac{3}{7}}\right)\cdot\frac{12}{55}+1\frac{3}{85}\right]:5\frac{14}{17}=\frac{5}{7}$.

2. $12\frac{3}{5}:\left[5\frac{2}{15}+\left(5\frac{5}{9}-\frac{8\frac{3}{4}}{\frac{8}{21}\cdot x-1\frac{2}{5}}\right)\cdot 5\frac{68}{125}\right]-\frac{2}{11}=\frac{4}{5}$.

3. $\left[3{,}25-\frac{\left(6\frac{9}{16}-2\frac{1}{2}\cdot x\right)\cdot 0{,}53}{0{,}75}\right]:6\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$.

4. $4{,}98-120{,}12:\left[8{,}008\cdot\left(4{,}0025-\frac{1{,}12211-2\cdot x}{4{,}444}\right)\right]+0{,}03=1{,}01$.

5. $\left[\left(\frac{30{,}01-x:9}{7}+97{,}785\right)\cdot 8-488{,}84\right]:7=45{,}6$.

6. $2\cdot[0{,}2-0{,}02:(0{,}002+0{,}0002\cdot x)]=0{,}3$.

7. $50{,}32-21{,}32:[(20+9{,}744:x)\cdot 0{,}5-1{,}63]=48{,}27$.

8. $[(2-x):1{,}5+17{,}4:29]:(25\cdot 0{,}16)-0{,}005=0{,}4$.

б) Восстановить цифры и знаки действий:

9.
$$\begin{array}{r} 123,.7. \\ 348,2.4 \\ \underline{2.9,748} \\ .3.,497 \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{r} 3\,.\,5,6\,7\,. \\ \underline{2\,0\,.,\ldots\,9} \\ .\,9\,6,8\,8\,9 \end{array}$$

---

[1] Часть задач этого раздела может быть решена в IV классе, например: № 4—28; 36—38; 50; 54; 56; 72—75; 82—84; 86—89; 92; 105; 113; 115; 127; 128; 131; 149; 150; 159; 163—168; 175—177; 184—194; 206; 312—314; 321; 323; 327; 328 и некоторые другие.

11.

```
      . . . . .
          3 4 .
---------------
      . . . . .
  . . . . . .
2 3 5 0 3 8
---------------
. . . . . . . 6
```

12.

```
      . . 4
      2 3 .
-----------
    . . 2 4
  1 . . .
1 . . .
-----------
. 1 . . . .
```

13.

```
    . . .
    2 . .
---------
  2 . . 5
. . 0
---------
8 3 . . .
```

14.

```
      2 3 . . 8 5
          . . . 5
-----------------
    . . . . . 2 .
    . 3 4 7 . .
  . . 9 5 7 0
. 0 4 . . .
-----------------
7 . . . . . . . .
```

15.

```
      . 7 . . .
          7 4 3
---------------
    . . . . . 5
  . . . . . .
. . . . . .
---------------
4 2 . . . 8 7 .
```

16.

```
      . . 8
      . . .
-----------
    7 . . 4
  7 . . 4
7 . . 4
-----------
. . 8 . . .
```

17.

```
      . . 6
      3 . .
-----------
    2 . . 6
  2 . . 2
. . 8 .
-----------
1 4 . . . .
```

18.

```
    . . . .
        . 2
-----------
  1 8 . 4 8
7 4 9 9 .
-----------
. . . 6 6 .
```

19.

```
      . . 8 .
        . 7 .
-------------
    3 . . . 0
  . . 0 . 2
. . . 3 .
-------------
. . . 9 . . .
```

20. 237 · . 1 . . . =

= 7 . . . 065

21. Какую цифру надо поставить вместо звездочки в четырехзначном числе 777*, чтобы получилось число, делящееся на 6?

22. Число 82** делится на 90. Найти делимое.

23. При делении некоторого числа на 45 цифру тысяч 3 в делимом приняли за 9, а цифру единиц 9 за 4 и получили в частном 438 и в остатке 44. Найти верное частное и остаток.

24. При делении некоторого числа на 105 цифру тысяч 6 в делимом приняли за 0, а цифру десятков 0 за 6 и получили в частном 389, а в остатке 16. Найти верное частное и остаток.

25. При сложении нескольких чисел ученик из-за небрежности допустил ошибки: цифру единиц 9 он принял за 3, цифру сотен 7 он принял за 1, а цифру тысяч 6 он принял за 5. У ученика получилось в сумме 72 438. Найдите верную сумму.

26. Между некоторыми цифрами 1 2 3 4 5 6 7 8 9, написанными в указанном порядке, поставить знаки сложения и вычитания так, чтобы получилось число, равное 100.

27. Найти быстро сумму всех четных чисел от 2 до 100.

28. Если от задуманного числа отнять 11, то получившееся число разделится на 11. Если от задуманного числа отнять 7, то полученное число разделится на 7. Если от задуманного числа отнять 13, то полученное число разделится на 13. Найти задуманное число.

в) Вычислить:

29. $\frac{5}{6}+6\frac{5}{6}\cdot\left(11\frac{94}{1591}-6\frac{38}{1517}\right):8\frac{11}{43}$

30. $1\frac{1}{6}+6\frac{5}{6}\cdot\left(10\frac{133}{2173}-5\frac{23}{1643}\right):41\frac{12}{31}$

31. $15\frac{120}{187}-5\frac{120}{143}-\frac{200}{2431}+\left(37\frac{11}{29}-37\frac{11}{29}\right):$

$:2\frac{13}{47}\cdot 100+50:21\frac{152}{163}$

32. $2\frac{16}{143}-1\frac{131}{132}+2\frac{11}{13}:2\frac{2}{5}+18\frac{13}{17}\cdot\left(15\frac{3}{37}-15\frac{3}{37}\right):$

$:14\frac{15}{31}+8\frac{298}{429}$

33. $\left(17\frac{3535}{88\,375}-16\frac{1001}{1365}\right)\cdot 3\frac{6}{23}+3\frac{6}{23}:\left(5-1\frac{187}{253}\right)$

34. $\left(13\frac{6105}{11\,211}-12\frac{9919}{18\,382}\right):1\frac{5}{1010}-2\frac{6}{17}\cdot\left(8-7\frac{2323}{4040}\right)$

35. $\dfrac{2\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\left(1\frac{3}{4}+\frac{17:3125}{8:6250}\right)}{\left(2\frac{31}{42}+1\frac{5}{16}\right)\cdot 6\frac{3}{43}+5\frac{40}{43}}$

Перед решением следующих примеров надо повторить распределительный закон умножения, правила прибавления и вычитания суммы и разности; определение и примеры взаимно простых чисел; повторить нахождение их наименьшего общего кратного; заметить, что два последовательных числа взаимно просты.

Найти быстро результаты:

36. $\dfrac{254 \cdot 399 - 145}{254 + 399 \cdot 253}$

37. $\dfrac{5932 \cdot 6001 - 69}{5932 + 6001 \cdot 5931}$

38. $\dfrac{423\,134 \cdot 846\,267 - 423\,133}{423\,133 \cdot 846\,267 + 423\,134}$

39. $\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{42} + \dfrac{1}{56} + \dfrac{1}{72} + \dfrac{1}{90} + \dfrac{1}{110} + \dfrac{1}{132}$

40. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 6} + \dfrac{1}{6 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 8} + \dfrac{1}{8 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 10}$

41. $\dfrac{1}{10 \cdot 11} + \dfrac{1}{11 \cdot 12} + \dfrac{1}{12 \cdot 13} + \dfrac{1}{13 \cdot 14} + \dfrac{1}{14 \cdot 15} + \dfrac{1}{15 \cdot 16} + \dfrac{1}{16 \cdot 17} + \dfrac{1}{17 \cdot 18} + \dfrac{1}{18 \cdot 19} + \dfrac{1}{19 \cdot 20}$

42. $\dfrac{4}{5 \cdot 7} + \dfrac{4}{7 \cdot 9} + \dfrac{4}{9 \cdot 11} + \dfrac{4}{11 \cdot 13} + \ldots + \dfrac{4}{59 \cdot 61}$

43. $\dfrac{7^2}{2 \cdot 9} + \dfrac{7^2}{9 \cdot 16} + \dfrac{7^2}{16 \cdot 23} + \ldots + \dfrac{7^2}{65 \cdot 72}$

44. $10\,101 \cdot \left(\dfrac{5}{111\,111} + \dfrac{5}{222\,222} - \dfrac{4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} \right)$

45. $333 \cdot \left(\dfrac{71}{111\,111} + \dfrac{573}{222\,222} - \dfrac{2}{3 \cdot 7 \cdot 37} \right)$

46. $182 \cdot \left(\dfrac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} : \dfrac{4 - \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}} \right) \cdot \dfrac{80\,808\,080}{91\,919\,191}$

47. $158 \cdot \left(\dfrac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \dfrac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right) \times \dfrac{505\,505\,505}{711\,711\,711}$

Найти x из следующих равенств:

48. $\left(\frac{1}{25\cdot 26}+\frac{1}{26\cdot 27}+\frac{1}{27\cdot 28}+\frac{1}{28\cdot 29}+\frac{1}{29\cdot 30}\right)\cdot 150+$
$+1{,}03:[10{,}3\cdot(x-1)]=11.$

49. $\left(\frac{2}{11\cdot 13}+\frac{2}{13\cdot 15}+\frac{2}{15\cdot 17}+\frac{2}{17\cdot 19}+\frac{2}{19\cdot 21}\right)\times$
$\times 462-[2{,}04:(x+1{,}05)]:0{,}12=19.$

II. Делимость чисел

50. Найти наименьшее число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3—2, на 4—3, на 5—4, на 6—5, на 7—6, на 8—7, на 9—8, на 10—9.

51. Найти наибольшее трехзначное число, при делении которого на 4 получается в остатке 3, а при делении на 5 — в остатке 4, а при делении на 6 — в остатке 5.

52. Найти все числа, большие 25 000, но меньшие 30 000, которые как при делении на 131, так и при делении на 1965 дают в остатке 125.

53. Найти все числа, большие 10 000, но меньшие 15 000, которые как при делении на 393, так и при делении на 655 дают в остатке 210.

54. При делении данного числа на 225 в остатке получилось 150. Разделится ли данное число нацело на 75 и почему?

55. На складе имеются ножи и вилки. Число тех и других больше 300, но меньше 400. Если ножи и вилки вместе считать десятками или дюжинами, то в обоих случаях получается целое число десятков и целое число дюжин. Сколько было ножей и вилок на складе, если ножей было на 160 меньше, чем вилок?

56. Изменятся ли при делении с остатком частное и остаток, если делимое и делитель увеличить в 3 раза? (Ответ подтвердить примером.)

57. При делении одного числа на другое получилось в частном 18 и в остатке 24. Как изменится частное и как остаток, если делимое и делитель уменьшить в 6 раз? (Ответ подтвердить двумя примерами.)

58. Доказать, что если сумма двух чисел есть число нечетное, то произведение этих чисел всегда будет числом четным.

59. Докажите, что если даны три каких-нибудь числа, из которых ни одно не делится на три, то или сумма

всех этих чисел, или сумма двух каких-нибудь из них должна делиться на 3.

60. Даны три последовательных натуральных числа, из которых первое — четное. Докажите, что произведение их кратно 24.

61. Для устройства елки купили орехов, конфет и пряников — всего 760 штук; орехов взяли на 80 штук больше, чем конфет, а пряников на 120 штук меньше, чем орехов. Какое наибольшее число одинаковых подарков для детей можно сделать из этого запаса?

62. Три автобуса в 6 *ч* утра отправились с одной и той же станции по трем различным маршрутам и совершают рейс туда и обратно: первый автобус — за 1 *ч* 30 *мин*, второй — за 1 *ч* 50 *мин* и третий — за 1 *ч* 10 *мин*.

По совершении каждого рейса автобусы через 10 *мин* отправляются в следующий рейс по тому же маршруту. Через сколько часов: 1) первый автобус отправится одновременно со вторым, 2) второй автобус — с третьим и 3) все три автобуса одновременно отправятся с конечной станции?

63. Отец и сын решили перемерить шагами расстояние между двумя деревьями, для чего отошли одновременно от одного и того же дерева. Длина шага отца — 70 *см*, сына — 56 *см*. Найти расстояние между этими деревьями, если известно, что следы их совпали 10 раз.

64. Если сложить несократимую дробь с единицей, то вновь полученная дробь будет также несократима. Почему?

65. Если правильная дробь несократима, то дробь, дополняющая ее до 1, также несократима. Почему?

66. Доказать, что из любых 11 чисел всегда можно выбрать два таких числа, разность которых кратна 10.

67. Доказать, что произведение НОД и НОК двух данных чисел равно произведению этих чисел.

68. Наименьшее общее кратное двух чисел, не делящихся друг на друга, равно 630, а наибольший общий делитель их равен 18. Найти эти числа.

69. Даны дроби $\frac{35}{396}$ и $\frac{28}{297}$. Найти наименьшее из всех чисел, при делении которого на каждую из данных дробей получатся целые числа.

70. Даны дроби $\frac{8}{15}$ и $\frac{18}{35}$. Найти наибольшее из всех чисел, при делении на которое каждой из данных дробей получаются целые числа.

71. Делимое разделили на удвоенный делитель и получили 13,375. Когда же делимое разделили на удвоенное частное, то получили 4. Найти делимое и делитель.

72. К числу 10 справа и слева приписать по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 36.

73. К числу 13 справа и слева приписать по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 45.

III. Метрическая система мер в задачах

74. Медный кубик, ребро которого 0,5 *см*, весит 1,1 *г*. Сколько весит медный куб, ребро которого равно 800 *мм*? (Ответ округлить до 0,1 *т*.)

75. Из соснового дерева сделан кубик весом 8 *г*. Ребро кубика равно 2,5 *см*. Какой объем занимают 4,8 *г* соснового дерева? (Ответ округлить до 0,1 *куб. м*.)

76. Длина ребра куба полметра. Этот куб разрезали на кубики, длина ребра каждого из них равна 2 *мм*. Кубики затем уложили в один сплошной ряд. Чему равна его длина?

77. Ребро куба равно 2 *дм*. Этот куб разрезали на кубические миллиметры, а затем выложили их в один сплошной ряд. Какой длины получился этот ряд?

78. В летний дождь выпало 5 *мм* осадков. Сколько стоила бы искусственная поливка таким количеством воды поля в 725 *га*, если стоимость 1 *л* при искусственной поливке равна 0,0005 коп?

79. Тюк прессованного сена имеет длину 86 *см*, ширину 4 *дм* и высоту 35 *см*. Какая часть грузоподъемности 50-тонного железнодорожного вагона используется при погрузке сена, если в него вмещается 650 тюков и если 1 *куб. м* прессованного сена весит 3,5 *ц*? (Ответ дать с точностью до 0,01 вагона.)

80. Высчитано, что 1 *кв. м* овсяного поля в течение лета испаряет около 240 *л* воды. Сколько это составляет кубических метров на 1 *га*? Сколько времени могла бы течь эта вода струей по 1 *л* в секунду?

81. Средний вес дождевой капли $\frac{1}{12}$ *г*. Определить число капель дождя, упавших на 1 *кв. м* земли, если дождь дал слой воды толщиной 2,2 *мм*.

IV. Задачи на части

82. От города *A* до города *B* 590 *км*. Часть этого пути идет в гору, часть — горизонтально и часть — под гору.

Путь под гору в 4 раза меньше горизонтального и на 110 *км* меньше, чем в гору. Найти длину пути в гору, горизонтально и под гору.

83. Группа туристов проехала на пароходе, на автобусе и прошла пешком — всего 475 *км*. На пароходе туристы проехали на 160 *км* больше, чем прошли пешком, а на автобусе — в 5 раз больше, чем прошли пешком. Сколько километров проехали туристы на пароходе, сколько на автобусе и сколько прошли пешком?

84. Сумма двух чисел 495. Одно из чисел оканчивается нулем. Если этот нуль зачеркнуть, то получится второе число. Найти эти числа.

85. Сумма двух чисел 37,75. Если первое слагаемое увеличить в 5 раз, а второе слагаемое — в 3 раза, то новая сумма окажется равной 154,25. Найти эти числа.

86. Матери было 28 лет, когда у нее родился сын. Сколько лет матери и сколько лет будет сыну в 1972 году, если в 1966 году сын был моложе матери в 4,5 раза?

87. Сестра моложе брата на 9 лет. Сколько лет будет сестре и сколько брату в 1978 году, если в 1970 году брат был в 2,5 раза старше сестры?

88. В двух ящиках было 43,25 *кг* сахара. После того как из первого ящика переложили во второй 4,75 *кг*, в первом осталось 0,73 того, что стало во втором. Сколько сахара было первоначально в каждом ящике?

89. На двух складах было 60 *т* угля. На первый склад еще доставили 7,5 *т* угля. После того количество угля на втором складе составило 0,875 того, что стало на первом складе. Сколько угля было первоначально на каждом складе?

90. Тремя тракторами вспахано 116 *га*. 0,75 площади, вспаханной первым, равны $\frac{2}{3}$ площади, вспаханной вто-

рым; третьим вспахано в полтора раза больше, чем первым. Сколько гектаров вспахано каждым трактором?

91. В двух корзинах 140 яблок. Сколько яблок в каждой корзине, если 0,3 количества яблок в первой корзине в три раза меньше, чем 0,36 количества яблок во второй корзине?

92. За 8 альбомов, 3 линейки и 4 циркуля заплатили 2,7 руб. Альбом в 4 раза дороже линейки, а 5 линеек стоят столько же, сколько 2 циркуля. Найти цену альбома, линейки и циркуля.

93. На 19,8 руб. купили 9 *кг* яблок, 8 *кг* груш и 5 *кг* слив. Цена яблок в $1\frac{1}{2}$ раза меньше цены груш, а 3 *кг* яблок стоят столько же, сколько 4 *кг* слив. Найти цену 1 *кг* яблок, груш и слив.

94. В два сосуда A и B одинакового веса налита вода, причем вес сосуда A с водой составляет $\frac{4}{5}$ веса сосуда B с водой.

Если содержимое сосуда B перелить в A, то вес последнего вместе с водой превысит вес сосуда B в 8 раз. Найти вес каждого сосуда и количество воды в каждом из них, зная, что в B первоначально было на 50 *г* больше воды, нежели в A.

95. Пионеры школы собрали за два дня 630 *кг* металлолома. Сколько лома собрано в каждый день, если 0,45 того, что собрано в первый день, равны 0,36 того, что собрано во второй?

96. За две книги уплатили 1 руб. 35 коп. Сколько стоит каждая книга, если 0,35 цены первой книги равны 0,28 цены второй книги? (Решение проверить.)

97. Два мотоцикла вышли из города B в одном направлении: первый — в 8 *ч* утра, второй — в 10 *ч* 50 *мин.* После того как второй мотоцикл догнал первый, они еще продолжали путь в течение $2\frac{1}{2}$ *ч.* В момент остановки оказалось, что второй мотоцикл обогнал первый на 30 *км.* В котором часу второй мотоцикл догнал первый и какое расстояние прошли мотоциклы до этого, если скорость первого мотоцикла равна 0,6 скорости второго.

98. Два мальчика решили купить конструктор. Число денег второго составляло $\frac{5}{6}$ числа денег первого.

У первого недоставало $\frac{3}{8}$ суммы денег, которую надо было заплатить за конструктор, а у обоих вместе было на 1,4 руб. больше, чем стоил конструктор. Сколько стоил конструктор?

99. Какое число нужно вычесть из числителя дроби $\frac{52\,367}{47\,633}$ и прибавить к знаменателю этой дроби, чтобы после сокращения получить $\frac{17}{83}$?

100. Дана дробь $\frac{14\,157}{117\,843}$. Какое число надо вычесть из знаменателя и прибавить к числителю, чтобы после сокращения получить $1\frac{1}{5}$?

101. Сумма числителя и знаменателя дроби равна 4140. После ее сокращения получилось $\frac{7}{13}$. Какова дробь до ее сокращения? (Решение проверить.)

102. Знаменатель дроби на 3521 больше числителя. После сокращения дроби получилось $\frac{4}{11}$. Какова была дробь до ее сокращения? (Решение проверить.)

103. Разность двух чисел равна 0,7. Если большее из них увеличить в 5 раз, а меньшее оставить без изменения, то разность будет 75,1. Найти эти числа.

104. Разность двух чисел равна $44\frac{1}{2}$. Если меньшее из них увеличить в 7 раз, то разность будет $10\frac{3}{14}$. Найти эти числа.

105. Среднее арифметическое двух чисел равно 10,01. Найти каждое из них, если одно из них в 5,5 раза меньше другого.

106. Сумма двух чисел равна 0,25. Частное тех же чисел также равно 0,25. Найти эти числа.

107. Разность двух чисел равна 0,6. Частное от деления меньшего на большее также равно 0,6. Найти эти числа.

V. Задачи на движение

а) Встречное движение

108. В 9 *ч* 25 *мин* утра пешеход отправился из *А* в *Б*. Идя с одинаковой скоростью, он прибыл в *Б* в 13 *ч* 15 *мин*. На следующий день в 11 *ч* утра он отправился

из *Б* в *А*, идя равномерно, но несколько скорее, чем он шел накануне, прибыл в *А* в 14 *ч* 40 *мин*. Зная, что расстояние между пунктами 12 *км*, определить, на каком расстоянии от *А* находится то место, через которое он проходил в один и тот же час в каждый из этих дней?

109. Длина шоссейной дороги между двумя колхозами 44 *км*. В 6 *ч* утра из первого колхоза выехал почтальон на велосипеде. В 7 *ч* 8 *мин*, навстречу ему, из второго колхоза выехал на лошади колхозник. В 9 *ч* утра они встретились. Скорость колхозника меньше скорости почтальона на 2,5 *км*. Найти скорость каждого.

110. $\frac{7}{12}$ расстояния между двумя городами составляют 75,25 *км*. В 5 *ч* 36 *мин* утра из *А* в *В* выехал велосипедист. В 7 *ч* 15 *мин* утра из *В* в *А* выехал другой велосипедист, который проезжал в час на 0,75 *км* более первого. Найти скорость каждого, если они встретились в полдень.

111. Расстояние между пунктами *А* и *Б* 114 *км*. В 6 *ч* из пункта *А* вышла по направлению в *Б* грузовая машина, а в 6 *ч* 45 *мин* навстречу ей вышел автобус со скоростью на 8 *км/ч* больше, чем скорость грузовой машины. Встреча произошла в 7 *ч* 30 *мин*. Найти скорости грузовой машины и автобуса.

112. В 8 *ч* 20 *мин* утра из Москвы в Ленинград вышла легковая машина, а в 9 *ч* 30 *мин* из г. Калинина также в Ленинград вышел автобус со скоростью, меньшей скорости легковой машины на 36 *км/ч*. Легковая машина догнала автобус в 10 *ч* 50 *мин*. Найти скорости легковой машины и автобуса. Между Москвой и Калинином 160 *км*.

113. Я еду в поезде, который идет со скоростью 40 *км* в час, и вижу, как в течение 3 *сек* мимо моего окна в противоположном направлении проходит скорый поезд, имеющий в длину 75 *м*. С какой скоростью шел встречный поезд?

114. Поезд за четверть минуты проходит мимо телеграфного столба, а за 50 *сек* — мост длиной 0,7 *км*. Вычислить среднюю скорость движения поезда и его длину.

115. Петя и Коля, живущие друг от друга на расстоянии 840 *м*, в 9 *ч* утра вышли навстречу друг другу. После встречи каждый из них продолжил движение

в том же направлении. Петя, дойдя до дома Коли, тотчас повернул обратно, а Коля, дойдя до дома Пети, тоже повернул обратно. В котором часу произошла первая встреча мальчиков и в котором вторая? Петя шел все время со скоростью 50 *м* в минуту, а Коля 70 *м* в минуту.

116. Зина и Валя, живущие друг от друга на расстоянии 1200 *м*, сговорились выйти навстречу друг другу в 9 *ч*. Зина вышла в 9 *ч*, а Валя задержалась на 5 *мин*. После того как они встретились, каждая из них продолжала движение, и, дойдя до дома, подруги вернулись обратно. В котором часу произошла первая встреча и в котором вторая, если скорость Зины 40 *м* в минуту, а скорость Вали 60 *м* в минуту?

117. Из городов *A* и *B* выехали навстречу друг другу две машины: из *A* — «Волга» в 7 *ч* 20 *мин* утра и из *B* — «Москвич» в 7 *ч* утра. В котором часу произошла встреча машин, если известно, что «Волга» весь путь от *A* до *B* проходит за 2 *ч* 42 *мин*, а «Москвич» — за 3 *ч* 36 *мин*?

118. Из *A* и *B*, расстояние между которыми 43,8 *км*, вышли навстречу друг другу два автобуса. До места встречи первый автобус, следовавший из *A*, прошел на 11,4 *км* больше второго автобуса, шедшего из *B*. Какова скорость каждого автобуса, если первый шел до встречи 0,75 *ч*, а второй вышел на 25 *мин* позже, чем первый?

119. Два автобуса одновременно вышли из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу. Через 7 *ч* езды между ними оказалось расстояние 136 *км*. Найти расстояние между *A* и *B*, если все расстояние один может проехать за 12 *ч*, а другой за 10 *ч*.

120. Два автомобиля одновременно вышли из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу. Через 4 *ч* езды между ними оказалось 140 *км*. Найти скорость каждого автомобиля, если один все расстояние может проехать за 6 *ч*, а другой за 5 *ч*.

121. Из города *A* в город *B* вышла грузовая машина. В то же время из города *B* в город *A* вышел автобус. Встреча произошла на расстоянии 150 *км* от города *A*. Найти расстояние от *A* до *B*, если известно, что грузовая машина может пройти весь путь от *A* до *B* за 8 *ч* 30 *мин*, а автобус — за 7 *ч* 30 *мин*.

122. Из двух городов вышли одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Первый за 2,4 *ч* прошел $\frac{9}{70}$ всего расстояния между городами, а второй за 2 *ч* прошел $\frac{13}{140}$ этого расстояния. С какой скоростью шел каждый автомобиль, если до места встречи второй прошел 351 *км*?

123. Два автомобиля вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов. Один из них может пройти все расстояние между этими пунктами за 3 *ч* 20 *мин*, а другой — за 2 *ч* 48 *мин*. Найти скорость каждого автомобиля, если через 1 *ч* 15 *мин* между ними было 50 *км*.

124. Из двух городов, расстояние между которыми 560 *км*, вышли два автомобиля навстречу друг другу и встретились через 4 *ч*. Если скорость первого автомобиля уменьшить на 15%, а скорость второго увеличить на 20%, то встреча произойдет тоже через 4 *ч*. Найти скорость каждого автомобиля.

125. Первую треть пути автомобиль прошел со скоростью 54 *км/ч*, а вторую — со скоростью 45 *км/ч* и третью — со скоростью 60 *км/ч*. Найти среднюю скорость движения автомобиля на всем пути. (Ответ дать с точностью до 0,1 *км/ч*.)

126. Первую четверть пути велосипедист ехал со скоростью 20 *км/ч*, вторую и третью четверти всего пути — со скоростью 24 *км/ч* и последнюю четверть — со скоростью только 12 *км/ч*. Найти среднюю скорость движения велосипедиста на всем пути. (Ответ дать с точностью до 0,1 *км/ч*.)

б) Движение в одном направлении

127. Два самолета вылетели одновременно из Москвы в одном и том же направлении: один — со скоростью 350 *км/ч*, другой — со скоростью 280 *км/ч*. Через два часа первый уменьшил скорость до 230 *км/ч*. На каком расстоянии от Москвы второй самолет догонит первый?

128. Моторная лодка должна выйти из *A* и прибыть в *B* к определенному моменту. Если она будет ехать со скоростью 35 *км/ч*, то опоздает на 2 *ч*, если она будет делать по 50 *км/ч*, то придет на 1 *ч* раньше срока. Каково расстояние между городами *A* и *B*? Сколько часов лодка должна была затратить на прохождение пути?

129. Мотоциклист выехал в 8 *ч* утра из города *A* к аэродрому *B*. Если он будет двигаться со скоростью 40 *км/ч*, то опоздает к прибытию самолета на 30 *мин*, а если скорость его будет 50 *км/ч*, то он приедет к аэродрому *B* за 2 *ч* до прибытия самолета. Найти расстояние между *A* и *B* и время прибытия самолета в пункт *B*.

130. Из города *A* в одном и том же направлении выехали два велосипедиста, первый в 8 *ч*, а второй в 8 *ч* 30 *мин* утра. То расстояние, которое первый велосипедист проезжает за 5 *ч* 15 *мин*, второй проезжает за 4 *ч* 40 *мин*. На отдых в пути каждый велосипедист останавливался на 45 *мин*. В котором часу второй велосипедист догнал первого?

131. Один мотоциклист выехал из *A* в *B*, делая в час по 60,9 *км*; через 2 *ч* из *A* в *B* выехал другой мотоциклист со скоростью 40,6 *км/ч*. Во сколько времени первый мотоциклист совершит путь из *A* в *B*, если второй приехал в *B* на 7 *ч* позднее первого?

132. Колхозник выехал из пункта *A* в 4 *ч* 30 *мин* утра и приехал в город, когда было без 10 *мин* 8 *ч* утра; если бы он проезжал в час на 1,2 *км* меньше, то ехал бы до города $3\frac{3}{4}$ *ч*. Сколько километров от *A* до города?

133. В 8 *ч* утра из пункта *A* вышел автобус, а в 9 *ч* из того же пункта *A* по той же дороге вышла легковая машина. Автобус, идя без остановки, прибыл в пункт *B* в 2 *ч* дня, а легковая машина — в 1 *ч* 30 *мин* дня. На каком расстоянии от пункта *A* легковая машина догнала автобус, если известно, что скорость ее на 20 *км/ч* больше скорости автобуса?

134. Чтобы доставить донесение за 2 *ч* 40 *мин* из *A* в *B*, расстояние между которыми 70,5 *км*, нарочный ехал сначала на велосипеде со скоростью 12,75 *км/ч*, а затем на мотоцикле со скоростью 67,5 *км/ч*. Сколько времени ехал нарочный на велосипеде и сколько на мотоцикле?

135. Пешеход и велосипедист отправляются одновременно и по одной дороге из города *A* в город *B*, лежащий в 70 *км* от *A*. Пешеход идет со скоростью 3,75 *км/ч*, велосипедист — 15 *км/ч*. Через сколько времени между ними будет расстояние, равное 30 *км*, и какое расстояние до *B* останется тогда проехать велосипедисту и пройти пешеходу?

136. Почтовый поезд вышел со станции в 7 *ч* 25 *мин* утра и шел со скоростью 40,5 *км/ч*.

В 8 *ч* 7 *мин* в том же направлении отправился с этой станции скорый поезд. С какой скоростью должен идти скорый поезд, чтобы догнать почтовый на расстоянии 210,6 *км* от станции?

137. На прохождение пути между двумя пристанями пароходу необходимо на 40 *мин* больше, чем катеру. Скорость катера 40 *км/ч*, а парохода — 30 *км/ч*. Найти расстояние между пристанями.

138. В 8 *ч* 30 *мин* утра из двух пунктов выходят два автомобиля по одному направлению. Автомобиль, идущий позади, проходит все расстояние между двумя пунктами отправления в $2\frac{1}{5}$ *ч*, передний же автомобиль движется в $2\frac{16}{17}$ раза медленнее заднего. Когда второй автомобиль догонит первый?

139. Если турист проедет между городами A и B на велосипеде, то он затратит на этот путь на 2 *ч* 20 *мин* меньше, чем если бы шел пешком. Скорость его движения на велосипеде 12 *км/ч*, а пешком 3,6 *км/ч*. Найти расстояние между городами A и B.

140. Из двух железнодорожных поездов один затрачивает на прохождение пути между двумя городами 2 *ч* 48 *мин*, другой — 4 *ч* 40 *мин*. Скорость первого поезда больше скорости второго на 26 *км/ч*. Определить расстояние между двумя городами.

141. Два спортсмена состязались в беге на одно и то же расстояние. Стартовали они в один и тот же момент из одного пункта. Один пробежал всю дистанцию за 1 *мин* 15 *сек*, а другой за 1 *мин* 20 *сек*. Сколько метров в минуту в среднем пробегал каждый спортсмен, если через 48 *сек* после старта между ними было 20 *м*?

142. Расстояние между пристанями по реке 43,2 *км*. Моторная лодка, идя по течению реки, затрачивает на этот путь 2 *ч* 24 *мин*. Сколько времени затрачивает эта лодка на этот же путь, идя против течения, если скорость течения 1,8 *км/ч*?

143. Пароход, идя против течения реки, прошел расстояние между пристанями за 9 *ч*. Сколько времени понадобится пароходу на обратный путь, если расстояние

между пристанями равно 113,4 *км*, а скорость течения реки 1,9 *км/ч*? (Ответ дать с точностью до 1 *ч*.)

144. Моторная лодка, идя по течению реки, затрачивает на путь от пристани A до пристани B 32 *ч*, а на обратный путь 48 *ч*. За какое время проплывает плот от пристани A до пристани B?

145. Пароход прошел расстояние между двумя пристанями, двигаясь по течению реки, за 4,5 *ч*. На обратный путь пароход затратил 6,3 *ч*. Скорость течения реки составляет 40 *м* в минуту. Найти расстояние между пристанями.

146. Велосипедист проехал $\frac{5}{7}$ пути и еще 40 *км* и ему осталось 0,75 пути без 118 *км*. Как велик его путь?

147. Возвращаясь домой из Москвы на поезде, пассажир по рассеянности проехал свою станцию, а когда сошел на следующей, то рассчитал, что поезду осталось пройти $\frac{13}{24}$ всего своего маршрута, а пассажиру придется проехать обратно до своей станции 14 *км*. Какова длина всего маршрута поезда, если станция, на которой жил пассажир, удалена от Москвы на расстояние $\frac{1}{3}$ всего маршрута?

148. Расстояние между A и B автомобиль должен был проехать за 10 *ч*. Сначала он ехал со скоростью 40 *км/ч*; когда до половины пути осталось 100 *км*, то, чтобы прийти вовремя, автомобиль увеличил скорость на 20 *км/ч*. Найти среднюю скорость автомобиля.

149. Из города A в город B приехали два товарища. Один из них 4 *ч* ехал на велосипеде со скоростью 15 *км/ч* и 6 *ч* на автомобиле. Второй 3 *ч* ехал на поезде и 2 *ч* на автомобиле (скорости автомобилей одинаковы). Скорость автомобиля в 2 раза меньше скорости поезда. Чему равно расстояние от A до B?

150. Поезд должен был пройти расстояние между пунктами A и B за 11 *ч* 15 *мин*. Выйдя из A, поезд сначала двигался с меньшей скоростью и прошел 0,4 всего пути за 5 *ч*. Но затем увеличил скорость на 10,8 *км/ч* и пришел в B без опоздания. Найти расстояние между A и B.

151. Поезд должен был пройти 720 *км* за 14 *ч* 24 *мин*. Пройдя 0,75 этого пути, он задержался из-за ремонта

на 16 *мин*. С какой скоростью поезд должен продолжать путь, чтобы прийти к месту назначения в срок?

152. Мальчик и девочка измерили одно и то же расстояние в 143 *м* шагами. Так как длины их шагов различны, то их следы совпали 20 раз. Шаг девочки 55 *см*. Найти длину шага мальчика.

153. Два приятеля, живущие один в пункте A, другой в пункте B, совершили в один и тот же день прогулку. Первый вышел в 10 *ч* 36 *мин* из пункта A и пришел в 16 *ч* 21 *мин* в пункт B. Второй вышел в 10 *ч* 30 *мин* из B и пришел в A в 15 *ч* 06 *мин*. В какое время они встретились?

VI. Задачи на работу

154. Один рабочий может выполнить работу за 4 *ч*, а другой за 6 *ч*. Сколько времени должен работать третий рабочий, если его производительность равна средней производительности первых двух?

155. Для наполнения водного бассейна устроено два водопроводных крана, из которых первый, действуя один, мог бы наполнить бассейн за 4 *ч* 30 *мин*, а второй — за 6 *ч* 45 *мин*. Сначала был открыт только первый кран на то время, в течение которого оба крана могли бы наполнить бассейн. После этого, не закрывая первый кран, открыли второй кран. Через сколько времени после открытия второго крана наполнился бассейн?

156. Чтобы выкачать из цистерны нефть, поставили два насоса различной мощности. Если бы действовали оба насоса, то цистерна оказалась бы пустой через 12 *мин*. Оба действовали вместе в течение 4 *мин*, после чего работал только второй насос, который через 24 *мин* выкачал всю остальную нефть. Во сколько минут каждый насос, действуя отдельно, мог бы выкачать всю нефть из цистерны?

157. Плавательный баесейн наполняется двумя трубами за 48 *мин*, если открыть сразу две трубы. Через одну трубу бассейн может наполниться за 2 *ч*. Найти объем бассейна, если известно, что за 1 *мин* через вторую трубу поступает воды на 50 *куб. м* больше, чем через первую.

158. Работа была поручена двум рабочим. Первый рабочий может выполнить эту работу за $\frac{2}{5}$ *ч*. Сначала работал первый рабочий, а через 8 *мин* 40 *сек* приступил к работе второй; после этого через $\frac{11}{90}$ *ч* работа была выполнена. Во сколько времени один второй рабочий может выполнить эту работу?

159. Чтобы наполнить ванну вместимостью 166 *л* за 22 *мин*, сначала открыли кран с горячей водой, через который в 1 *мин* вливается 6,75 *л*. Затем этот кран закрыли и открыли кран с холодной водой, через который в 1 *мин* вливается 8,5 *л*. Сколько времени был открыт каждый кран?

Разные задачи

160. Школьник прочитал книгу за 3 дня. В первый день он прочитал 0,2 всей книги и еще 16 страниц, во второй день 0,3 остатка и еще 20 страниц. В третий — 0,75 нового остатка и последние 30 страниц. Сколько страниц в книге?

161. Колхозник продал картофель трем покупателям: первому — $\frac{1}{4}$ часть его и еще 10 *кг*, второму — $\frac{5}{11}$ остатка и еще 10 *кг*, а третьему — последние 50 *кг*. Сколько картофеля продал колхозник?

162. Туристы совершили переход на велосипедах в три дня. В первый день они прошли $\frac{1}{3}$ всего пути без 2 *км*. Во второй день — половину оставшегося пути без 3 *км* и в третий — $\frac{8}{9}$ оставшегося пути и еще 6 *км*. Сколько километров проехали туристы за три дня?

163. Если к задуманному числу прибавить 0,43 его, а затем от полученного результата отнять 0,58 задуманного числа и еще 4,04, то получим 30,3. Найти задуманное число.

164. Если от задуманного числа отнять 0,3 его, к полученному результату прибавить 0,4 задуманного числа, а затем еще 2,78, то получится 25. Найти задуманное число.

165. Я задумал число. Если его увеличить в 2,5 раза, к результату прибавить 1,75 и полученную сумму раз-

делить на 0,8, то получится 37,5. Какое число я задумал?

166. Я задумал число, вычел из него 1,05, разность умножил на 0,8, к произведению прибавил 2,84, полученную сумму разделил на 0,01 и получил 700. Какое число я задумал?

167. Одно число больше другого на 406. Если большее число разделить на меньшее, то в частном получится 3 и в остатке 66. Найти эти числа.

168. Сумма двух чисел равна 640. Если разделить большее число на меньшее, то в частном получится 7 и в остатке 64. Найти эти числа.

169. В двух ящиках было 155 *кг* муки. Когда из первого пересыпали во второй 20 *кг*, то в первом осталось $\frac{12}{19}$ того, что стало во втором. Сколько муки было первоначально в каждом ящике?

170. В двух мешках находится 140 *кг* муки. Если из первого мешка переложить во второй $\frac{1}{8}$ муки, находящейся в первом мешке, то в обоих мешках будет поровну. Сколько килограммов муки в каждом мешке?

171. Два мальчика имели вместе 43 коп. Когда первый израсходовал 5 коп., а второй — 13 коп., то оставшиеся деньги первого составили $\frac{2}{3}$ оставшихся денег второго. Сколько денег у каждого было первоначально?

172. Площадь двух участков земли равна 24,25 *га*. Если от первого отрезать 3,5 *га* и прирезать их ко второму, то в первом все-таки окажется больше на 0,6 *га*, чем станет во втором. Как велик каждый участок?

173. В двух бутылях 12 *л* чернил. Если из первой отлить 4 *л*, а во вторую долить 2,5 *л*, то во второй станет на 1,25 *л* больше, чем в первой. Сколько чернил было в каждой бутыли?

174. В одном баке 400 *л* бензина, в другом — 900 *л*. Каждый час из первого бака выливают 20 *л*, а из второго — 10 *л*. Через сколько часов в первом баке останется бензина в 4 раза меньше, чем во втором?

175[1]. Для нумерации страниц словаря потребовалось 2322 цифры. Сколько страниц заключал в себе словарь?

---

[1] Предполагается, что все без исключения страницы книг занумерованы: 1, 2, 3 и т. д.

176[1]. Страницы справочника по математике перенумерованы, на последней странице стоит число 710. Сколько потребовалось цифр для нумерации всех страниц?

177. Ученик перенумеровал страницы своей тетради. Для этого он решил писать номера страниц только с одной стороны, ставя нечетные номера: 1; 3; 5 и т. д. Всего он написал 104 цифры. Сколько всего страниц в тетради и сколько раз ученик написал цифру 7?

178. На школьной викторине было предложено 30 вопросов. За каждый правильный ответ на вопрос участнику турнира засчитывалось 7 очков, а за неправильный ответ с него списывалось 12 очков. Сколько верных ответов дал один из участников, если при окончательном подсчете оказалось, что он набрал 77 очков?

179. Для экскурсии надо собрать деньги. Если каждый экскурсант внесет по 75 коп., то на расходы не хватит 4,4 руб. Если каждый внесет по 80 коп., то останется 4,4 руб. Сколько человек принимает участие в экскурсии?

180. Две бригады получили задание убрать картофель с двух одинаковых по площади участков. Первая бригада убирала ежедневно по 3,2 *га*, но через несколько дней ей еще оставалось убрать картофель с 4 *га*. Вторая бригада работала на 2 дня больше первой, но ей все же осталось еще убрать 0,4 *га*, так как она убирала только по 2,8 *га* в день. Чему равна площадь участка, который должна была убрать каждая бригада?

181. Два пионерских отряда обязались собрать по одинаковому количеству макулатуры. Первому отряду, который собирал в среднем по 24 *кг* в день, через несколько дней оставалось собрать еще 30 *кг*. Второй отряд собирал ежедневно по 28 *кг* и к тому же он работал на 2 дня дольше первого, поэтому он перевыполнил свое обязательство на 46 *кг*. Сколько макулатуры обязался собрать каждый отряд?

182. Если сестра отдаст брату 1,6 руб., то у обоих станет денег поровну. Если же брат даст сестре 0,5 руб.,

---

[1] Предполагается, что все без исключения страницы книг занумерованы: 1, 2, 3 и т. д.

то у сестры станет денег в 2,5 раза больше, чем у брата. Сколько денег у брата и сколько у сестры?

183. Когда Колю и Петю спросили, сколько денег каждый из них накопил на покупку книг, Коля ответил: «Если я дам Пете из своих денег 25 коп., то у нас будет денег поровну. Если же мне Петя даст из своих денег 1 руб. 40 коп., то у меня будет денег в 2,5 раза больше, чем у него». Сколько денег накопил каждый мальчик?

184. В одном бидоне молока в 3 раза больше, чем в другом. Когда в бо́льший бидон долили 6 *л*, а в другой 7 *л*, то в первом оказалось молока в 2 раза больше, чем в другом. Сколько молока в каждом бидоне?

185. Если из первой корзины переложить 20 апельсинов во вторую, то в обеих корзинах апельсинов окажется поровну; если из второй корзины переложить 20 апельсинов в первую, то в первой станет в 3 раза больше, чем во второй. Сколько апельсинов было в каждой корзине?

186. Если из второго вагона 5 пассажиров перейдут в первый, то в вагонах пассажиров станет поровну; если же из первого вагона 8 пассажиров перейдет во второй, то во втором вагоне станет в 2 раза больше, чем в первом. Сколько пассажиров было в каждом вагоне?

187. Написаны подряд все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Сколько раз написана цифра 0? 1? 5?

188. Какое наибольшее и какое наименьшее семизначное число можно написать четырьмя нулями и тремя единицами?

189. Написан натуральный ряд чисел. Числа одно от другого не отделены. Какая цифра стоит на 1001-м месте?

190. Найти четыре последовательных четных числа, сумма которых равна 4052.

191. Сумма шести последовательных чисел равна 1275. Найти эти числа.

192. Сумма пяти последовательных чисел равна 875. Найти эти числа.

193. Найти такие шесть чисел, из которых каждое следующее больше предыдущего на 0,4. Их среднее арифметическое равно 3.

194. Найти семь таких чисел, из которых каждое следующее меньше предыдущего на 0,2. Их среднее арифметическое равно 6,6.

195. Представить $1\frac{1}{12}$ в виде суммы трех дробей, числители которых равны 1.

196. Представить дробь $\frac{2}{7}$ в виде суммы двух других дробей с разными знаменателями, числители которых равны 1.

197. Найти четное четырехзначное число, две средние цифры которого образуют число, в 3 раза большее числа тысяч и в 2 раза большее числа единиц этого числа.

198. Увеличится или уменьшится неправильная дробь, если к ее числителю и ее знаменателю прибавить одно и то же натуральное число? Почему?

199. Увеличится или уменьшится правильная дробь, если к ее числителю и ее знаменателю прибавить одно и то же натуральное число? Почему?

200. Как изменится частное, если к делимому прибавить его половину, а из делителя вычесть 0,4 его?

201. Сумма 0,4 первого числа и 0,4 второго числа равна 0,75. Чему равна сумма 0,15 первого числа и 0,15 второго числа?

202. Разность между $\frac{5}{12}$ первого числа и $\frac{5}{12}$ второго числа равна $\frac{3}{8}$. Чему равна разность между $\frac{4}{7}$ первого числа и $\frac{4}{7}$ второго числа?

203. Доказать, что если произведение двух чисел есть число нечетное, то сумма этих чисел всегда будет числом четным.

204. Произведение двух чисел равно 23 664. Если второй сомножитель уменьшить на 4, то произведение станет равным 22 032. Каковы эти числа?

205. Частное двух чисел равно 165. Если делимое уменьшить на 143, то частное станет равным 154. Каковы эти числа?

206. В двух корзинах было поровну яблок. После того как из одной корзины продали 150 яблок, а из другой — 194, в первой корзине осталось в три раза больше, чем во второй корзине. Сколько яблок было в каждой корзине?

207. Периметр прямоугольника равен 18 *см*. Если его длину уменьшить на 20%, а ширину увеличить на

25%, то периметр не изменится. Найти площадь прямоугольника.

208. В связи с изменением сезонных цен на овощи и фрукты цены на яблоки были повышены на 0,2 первоначальной цены, а спустя некоторое время снижены на 0,2 цены. Подешевел или вздорожал этот товар по сравнению с первоначальной ценой?

209. В трех районах города 12 000 жителей. Сколько жителей в каждом районе, если известно, что $\frac{2}{3}$ числа жителей первого района равны 0,5 жителей второго района и $\frac{2}{5}$ числа третьего района?

210. Трем братьям 58 лет. Сколько лет каждому, если $\frac{3}{4}$ лет младшего равны $\frac{2}{3}$ лет среднего и равны $\frac{1}{2}$ лет старшего?

211. Два ученика купили себе по книге. Первый израсходовал на это $\frac{5}{9}$ своих денег, второй $\frac{2}{3}$ своих денег. До покупки книг у первого было на 12 коп. меньше, чем у второго, а после покупки стало поровну. Сколько денег было у каждого до покупки?

212. От Москвы до Тулы поезд шел со скоростью 90 *км/ч*, а обратно со скоростью 110 *км/ч*. Найти среднюю скорость поезда в оба конца.

213. Совхоз предполагал уложить виноград в ящики, по 9,375 *кг* в каждый, но, взяв ящики большего размера, положил в каждый ящик по 12,5 *кг*. Ящиков для этого потребовалось на 40 меньше, чем предполагали. Сколько килограммов винограда собирался отправить совхоз?

V—VI

КЛАСС

АРИФМЕТИКА

I. Задачи на совместную работу

214. 15 рабочих первой бригады могут построить деревянный дом в 18 дней, 20 рабочих второй бригады — в 12 дней, 30 рабочих третьей бригады могли бы построить тот же дом во столько дней, во сколько дней его построили бы 3 рабочих первой и 24 рабочих второй бригад, работая вместе. Для постройки были приглашены 12 рабочих первой бригады, 16 рабочих второй бригады и 15 рабочих третьей бригады, которые работали вместе до окончания работы. За работу они получили 2970 руб. Сколько дней продолжалась постройка и сколько денег получил каждый?

215. 7 легких тракторов могут вспахать некоторое поле за 10 дней, а 4 гусеничных могли бы вспахать то же поле за 7 дней. Во сколько времени 8 легких и 5 гусеничных тракторов, работая одновременно, могли бы вспахать другое поле, площадь которого относится к площади первого, как 41 : 12?

216. Один рабочий может выполнить заказ за 6 дней, а другой — за 15 дней. Сначала работал первый рабочий, а затем закончил работу второй. Заказ был выполнен за 9 дней. Сколько деталей было изготовлено, если первый сделал на 150 деталей больше, чем второй?

217. Одна машинистка может перепечатать некоторую рукопись за 5 *ч* 20 *мин*, а другая — за 4 *ч* 40 *мин*. Однажды, работая вместе, они напечатали 90 страниц. Сколько страниц напечатала каждая машинистка?

218. Два насоса при одновременной совместной работе могут выкачать воду из котлована за 12 *ч*. Производительность одного насоса в полтора раза меньше производительности другого. Во сколько часов была бы

выкачана вода из этого котлована, если бы сначала половину всей воды выкачал первый насос, а затем второй — остальную воду?

II. Задачи на движение

219. Велосипедист ехал с дачи в город со скоростью $8\frac{1}{3}$ *км/ч* и должен был прибыть в город в 9 *ч* 40 *мин* утра. Не доезжая 15 *км* до города, он встретил знакомого, ехавшего той же дорогой из города, и, чтобы поговорить с ним, поехал обратно со скоростью этого знакомого. Проехав так вместе 3,75 *км*, он оставил знакомого, повернул опять к городу и, двигаясь с прежней скоростью, прибыл в город в 10 *ч* 37 *мин* утра. В котором часу знакомый велосипедиста выехал из города?

220. Пароход, идя вверх по течению реки, проходит расстояние между городами *A* и *B* за 4 *ч* 30 *мин*, а обратно — за 3 *ч*. Во сколько времени при тех же условиях проплывает то же расстояние бочонок, брошенный по течению реки в месте *A*?

221. Поезд должен пройти расстояние между двумя городами в определенный промежуток времени. Через $7\frac{5}{16}$ *ч* после выхода его с места отправления, когда до конечного пункта оставалось еще 259,2 *км*, машинист рассчитал, что если поезд будет двигаться с прежней скоростью, то придет на конечный пункт с опозданием на 1,8 *ч*, а для того, чтобы прийти без опоздания, он должен на остающемся участке пути двигаться в $1\frac{2}{7}$ раза быстрее, чем раньше. Определить расстояние между этими городами.

222. По двум параллельным железнодорожным путям едут навстречу друг другу два поезда, каждый равномерно, но с различными скоростями. Длина первого поезда 130,75 *м*, длина второго поезда 117,75 *м*. Промежуток времени, в течение которого оба поезда шли при встрече один мимо другого, был равен $3\frac{7}{45}$ *сек*. Если бы поезда шли в одну сторону и если бы первый поезд нагнал второй, то они шли бы один возле другого 28,4 *сек*. Какова скорость каждого?

223. Пароход прошел расстояние между двумя пристанями по течению реки за 10 *ч*, а в обратном направ-

лении — за 15 *ч*, делая в час на 8 *км* меньше. Сколько километров между пристанями?

224. Моторная лодка может проплыть 28 *км/ч* по течению и только 20 *км/ч* против течения. Какое расстояние прошла лодка по течению, если она отправилась в 10 *ч* 30 *мин* утра, а возвратилась, нигде не останавливаясь, в 4 *ч* 30 *мин* того же дня?

225. Один велосипедист выехал в 6 *ч* 05 *мин* утра из *A* в *B*, а вернулся по той же дороге в 11 *ч* 26 *мин* того же утра. Зная, что из *A* в *B* он ехал со скоростью 18 *км/ч*, а обратно со скоростью 16 *км/ч* и что в *B* он задержался $\frac{1}{4}$ *ч*, определить расстояние между *A* и *B*.

226. Из одного и того же города в одном направлении выехали два велосипедиста с разной скоростью. То расстояние, которое первый велосипедист проезжал за $5\frac{1}{4}$ *ч*, второй велосипедист проезжал за $4\frac{2}{3}$ *ч*. Второй велосипедист выехал через $1\frac{1}{2}$ часа после первого. Через сколько часов после выезда второй велосипедист догонит первого?

227. Из города *A* в город *B* выехал всадник со скоростью 10 *км/ч*. Через $\frac{5}{6}$ *ч* после выезда всадника вслед за ним выехал велосипедист и ехал со скоростью 12 *км/ч*. В город *B* велосипедист приехал на 5 *мин* позже всадника. Определить расстояние между городами.

228. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 22,4 *км*, одновременно выезжают два мотоциклиста. Если они поедут навстречу друг другу, то встретятся через полчаса после выезда. Если же поедут в одном направлении, то второй догонит первого через 3,5 *ч* после выезда. Найти скорость каждого мотоциклиста.

229. Если бы колхозник, отправляясь на железнодорожную станцию, шел со скоростью 3,5 *км/ч*, то он пришел бы на станцию через $\frac{1}{2}$ *ч* после отхода поезда. Если же он будет проходить по 4,2 *км/ч*, то придет за 20 *мин* до отхода поезда. Какое расстояние должен пройти колхозник до станции?

230. В 6 *ч* утра из *A* в *B* вышел пешеход. В 10 *ч* того же дня из *B* в *A* выехал велосипедист и встретил

пешехода в 1 *ч* дня. Расстояние *АВ* равно 62 *км*. Найти скорость каждого, если их отношение равно 0,28.

231. Расстояние между двумя портами 301 *км*. Из первого порта в 0 *ч* 45 *мин* вышел пароход во второй порт. В 3 *ч* 5 *мин* из второго порта вышел другой пароход, который проходил в час на 6 *км* больше, чем первый. Пароходы встретились в то же утро в 7 *ч* 25 *мин*. По скольку километров в час проходил каждый пароход и где находилось место их встречи?

232. Два автомобиля, выходя одновременно навстречу друг другу из двух городов, могут встретиться через 6 *ч*. Скорость одного из них в $1\frac{1}{3}$ раза больше скорости другого. На сколько часов позже по сравнению с другим автомобилем должен выехать первый автомобиль, чтобы встретиться на середине пути между городами?

233. Водитель автобуса должен был проехать от пункта *А* до пункта *Б* за определенное время. Пройдя первую треть пути с намеченной скоростью, водитель на остальной части пути увеличил скорость на 20%, а потому прибыл в пункт *Б* на 20 *мин* раньше срока. Сколько времени затратил водитель на весь путь от *А* до *Б*?

234. Первую половину пути от *А* до *Б* грузовая машина проходит со скоростью 32 *км/ч*. На вторую половину пути машина затрачивает времени на 20% меньше, чем на первую. Найти среднюю скорость движения машины на всем пути от *А* до *Б*. (Ответ дать с точностью до 1 *км/ч*.)

235. Поезд проходит данное расстояние за 10 *ч*. Но если бы он проходил в час на 10 *км* больше, то ехал бы всего 8 *ч*. Определить данное расстояние и скорость поезда.

236. Пройдя половину пути, пароход увеличил скорость на 25%, благодаря чему прибыл на конечный пункт на полчаса раньше срока. Сколько времени затратил пароход на весь путь?

III. Решить уравнения

237. $2\frac{2}{3} : \left\{\left[(3{,}72 - 0{,}02x) \cdot \frac{10}{37}\right] : \frac{5}{6} + 2{,}8\right\} - \frac{7}{15} = 0{,}2.$

238. $0{,}9 + \left\{\left[3{,}25 - \left(6\frac{9}{16} - 0{,}025x\right) \cdot 0{,}6\right] : 0{,}75\right\} : 6\frac{2}{3} = 1{,}2.$

239. $[(7+0{,}004x):0{,}9]:24{,}7-12{,}3=77{,}7.$

240. $\left[\left(6\frac{3}{7}-\frac{0{,}75x-2}{0{,}35}\right)\cdot 2{,}8+1{,}75\right]:0{,}05=235.$

241. $\left[0{,}72-\left(10-\frac{9{,}99999}{1{,}1-x}\right)\cdot 0{,}625\right]:0{,}225=0{,}7.$

242. $\left[3{,}25-\frac{(6{,}5625-2{,}5x)\cdot 0{,}53}{0{,}75}\right]:6\frac{2}{3}=\frac{4}{15}.$

243. $[(0{,}001x+2):0{,}3]\cdot 0{,}01-11{,}2=22{,}2.$

244. $(1-0{,}021:0{,}06):0{,}13x=\left[2\frac{1}{3}-\left(2\frac{3}{16}-\frac{2}{3}\right)\right]:\frac{3}{8}.$

245. $(0{,}66-0{,}012:0{,}2):\left(1-1\frac{4}{7}\cdot 0{,}4\right)=$

$$=2\frac{9}{13}x:\left(3{,}125-5{,}6:2\frac{2}{3}\right).$$

IV. Задачи на проценты

246. В одном из городов Грузии часть жителей умеет говорить только по-грузински, часть — только по-русски. По-грузински говорят 85% всех жителей, по-русски — 75%. Сколько процентов всех жителей говорит на обоих языках?

247. При проверке влажности зерна она оказалась равной 16%. 200 *кг* зерна просушили, после чего зерно стало легче на 20 *кг*. Найти влажность зерна после просушки (с точностью до 0,1%).

248. Число коров на одной молочной ферме на 12,5% меньше, чем на другой, но средний удой каждой коровы на 8% выше. На какой ферме получают молока меньше и на сколько процентов?

249. Объем строительных работ увеличивается на 80%. На сколько процентов нужно увеличить число рабочих, если производительность труда будет увеличена на 20%?

250. В связи с введением рационализаторского предложения время, необходимое для изготовления некоторой детали машины, уменьшилось на 20%. На сколько процентов увеличилась производительность труда?

251. В бассейн проведена труба. Вследствие засорения ее приток воды уменьшился на 60%. На сколько процентов вследствие этого увеличится время, потребное для заполнения бассейна?

252. Заработок рабочего повысился на 20%, а цены на продукты и другие товары снизились на 15%. На сколько процентов рабочий теперь на свой заработок может купить больше продуктов и товаров, чем прежде?

253. Ширину прямоугольника увеличили на 3,6 *см*, а длину уменьшили на 16%. В результате площадь нового прямоугольника оказалась больше прежнего на 5%. Найти ширину нового прямоугольника.

254. Длину прямоугольника уменьшили на 2,4 *см*, а ширину увеличили на 30%. В результате площадь нового прямоугольника оказалась на 4% больше прежнего. Найти длину нового прямоугольника.

255. Две противоположные стороны прямоугольника удлинили на 10%, а две другие укоротили на 10%. Как изменилась площадь прямоугольника?

256. Каждую сторону квадрата увеличили на 20%. На сколько процентов увеличилась площадь квадрата?

257. Изготовлены два куба — один из меди, другой из стали. Ребро медного куба на 20% больше ребра стального куба. На сколько процентов медный куб тяжелее по сравнению со стальным? (Удельный вес меди на 10% больше удельного веса стали.)

258. Из дуба и стали изготовлены две треугольные пластинки одинаковой толщины, но основание первого (из дуба) треугольника на 20% больше основания второго и высота первого треугольника на 50% больше высоты второго. На сколько процентов вес стальной пластинки больше веса дубовой? (Удельный вес дуба в 10 раз меньше удельного веса стали. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.)

259. При обработке деревянного бруса его длина уменьшилась на 2,5%, ширина на 7,2% и толщина на 2,8%. Сколько процентов от первоначального объема бруса составили отходы при обработке? (Ответ дать с точностью до 0,1%.)

260. На сколько процентов увеличится объем куба, если каждое его ребро увеличить на 10%?

261. На сколько процентов увеличится полная поверхность куба, если каждое его ребро увеличить на 20%?

262. Общий сбор пшеницы в колхозе «Звезда» больше, чем в колхозе «Луч» на 26%, хотя площадь под пшеницей больше только на 5%. На сколько процентов

урожай пшеницы с 1 *га* в колхозе «Звезда» больше, чем в колхозе «Луч»?

263. На утреннем концерте 40% всех посетителей были школьники, 36% — женщины и остальные посетители — мужчины. На вечерний концерт пришло мужчин на 75% больше, чем на утренний, женщин на 37,5% больше, а школьников на 75% меньше, чем на утренний концерт. Как и на сколько процентов число посетителей на вечерний концерт изменилось по сравнению с числом посетителей на утреннем концерте?

264. Слиток сплава серебра с цинком весом в 3,5 *кг* содержал 76% серебра. Его сплавили с другим слитком и получили слиток весом в 10,5 *кг*, содержание серебра в котором было 84%. Сколько процентов серебра содержалось во втором слитке?

265. 5 *л* сливок с содержанием жира 35% смешали с 4 *л* 20-процентных сливок и к смеси добавили 1 *л* чистой воды. Какой жирности получилась смесь?

266. К 200 *куб. см* 15-процентного раствора соли добавили 300 *куб. см* 40-процентного раствора той же соли и 250 *куб. см* чистой воды. Каково процентное содержание соли в полученном растворе?

267. Из двух сплавов с 60-процентным и 80-процентным содержанием меди требуется получить сплав в 40 *кг* с 75-процентным содержанием меди. Сколько килограммов каждого сплава следует взять для этого?

268. Нержавеющая сталь представляет сплав железа с хромом и никелем. Сколько хрома и сколько никеля надо сплавить с 67,6 *кг* железа, если хрома в сплаве должно быть 15%, а никеля в 30 раз меньше, чем хрома?

269. Сколько граммов 8% серной кислоты можно получить из 200 *г* жидкости, содержащей 62% серной кислоты?

270. До какого веса надо выпарить 800 *г* 10-процентного раствора соли, чтобы довести ее содержание до 16%?

271. Сколько граммов воды надо прибавить к 50 *г* 35-процентной соляной кислоты, чтобы получить 10-процентную кислоту?

272. Древесина только что срубленного дерева содержит 64% воды. Через неделю количество воды стало уже 48% от веса дерева. На сколько уменьшился при

этом вес дерева, если только что срубленное оно весило 7,5 *ц*. (Ответ дать с точностью до 0,1 *ц*.)

273. Только что добытый каменный уголь содержит 2% воды. После некоторого времени он впитывает в себя еще некоторое количество воды и содержит уже 15% ее. На сколько увеличивается при этом вес 25,75 *т* только что добытого каменного угля? (Ответ дать с точностью до 0,1 *т*.)

274. Когда 40 рабочих цеха включились в бригаду коммунистического труда, продукция цеха увеличилась на 20%; когда же 60% всех рабочих цеха стали работать по-новому, продукция цеха увеличилась в 2,5 раза. Сколько рабочих в цехе и во сколько раз увеличится продукция цеха, когда все рабочие станут передовиками производства?

275. Молоко одной коровы содержит 5% жира; молоко же другой — 3,5%, но удой ее на 30% выше первой. Сколько надо взять молока от первой коровы, чтобы получить жира на 5,4 *кг* больше, чем дает молока за то же время вторая корова?

276. Цена за вход на стадион 1 руб. 50 коп. с человека. Когда цену понизили, количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько копеек понижена плата?

277. Пионер, собирая деньги на радиоприемник, обратился за помощью к отцу и двум его братьям; они помогли ему. Выяснилось, что первый дядя дал 25% того, что было собрано без него, включая накопления мальчика. Второй дядя и отец дали соответственно $33\frac{1}{3}\%$ и 50% того, что было собрано без них, включая накопления мальчика. Сколько стоил радиоприемник, если у пионера было 10,4 рубля?

278. Два брата купили за 80 руб. радиоприемник и за 200 руб. телевизор. На покупку радиоприемника старший брат отдал 20% своих денег, а младший — $22\frac{2}{9}\%$ своих денег. На телевизор старший брат дал 60% своих денег, а младший — $44\frac{4}{9}\%$ своих денег. Сколько денег было у каждого брата?

279. Найти возраст брата и возраст сестры, если 62,5% возраста брата больше 75% возраста сестры на

2 года, а 50% возраста брата больше 37,5% возраста сестры на 7 лет.

280. Одно из слагаемых составило $\frac{5}{12}$ другого. Сколько процентов от суммы составляет меньшее слагаемое? (Решение задачи объяснить, ответ дать с точностью до 0,1%.)

281. Вычитаемое составляет $\frac{7}{13}$ уменьшаемого. Сколько процентов вычитаемого составляет разность? (Решение задачи объяснить, ответ дать с точностью до 0,1%.)

282. Один рабочий обтачивает за неделю 960 деталей и израсходовал на это 12 резцов, другой рабочий на обточку 640 таких же деталей израсходовал 10 резцов. Кто экономнее расходовал резцы и на сколько процентов?

283. Три бригады начали одновременную пахоту. Установленная планом ежедневная норма первой бригады так относится к норме второй бригады, как 5 : 4, а второй к третьей, как 2 : 1,5. Первая бригада увеличила ежедневную норму на 10%, вторая бригада на 20%, а третья, как и первая, на 10%. В результате к одному сроку первая бригада вспахала на 14 *га* больше второй бригады. Сколько гектаров вспахала каждая к этому сроку?

284. За I квартал завод выполнил 26% годового плана, а количество продукции, выполненное за II, III и IV кварталы, пропорционально числам 6,5 : 7,8 : 9,1. Определить, на сколько процентов перевыполнил завод план, если во II квартале завод дал продукции в $1\frac{1}{4}$ раза больше, чем в первом.

V. Задачи на части

285. Одно число больше другого на 16. Найти эти числа, если $\frac{5}{32}$ одного числа равны $\frac{3}{16}$ другого.

286. Найти два числа, если известно, что $\frac{5}{8}$ одного равны $\frac{3}{4}$ другого и если одно больше другого на 12?

287. Найти два числа, если $\frac{9}{11}$ одного равны $\frac{6}{7}$ другого и если их сумма равна 172.

288. Сумма трех чисел равна 136,5. Если первое число умножить на 8, второе на 4, третье на 6, то полученные произведения окажутся равными. Найти эти числа.

289. Самое большое из трех неизвестных чисел больше самого малого на 2,4. Если одно из них умножить на 12, другое на 15 и третье на 10, то полученные произведения окажутся равными. Найти эти числа.

290. Найти два числа, если их сумма равна 10,5 и частное от деления одного из них на другое равно 10,5.

291. Найти два положительных числа по таким данным: их разность равна 0,125 и частное при делении меньшего числа на большее равно 0,125.

292. Сумма трех чисел 254,772. Если в одном из чисел перенести запятую на две цифры вправо, то получится большее из чисел, а если перенести в том же числе запятую влево на одну цифру, то получится меньшее из чисел. Найти эти числа.

293. Сумма трех чисел 3898,32. Если в одном из чисел перенести запятую вправо на одну цифру, то получится большее из данных чисел, а если в этом же числе перенести запятую влево на одну цифру, то получится меньшее из данных чисел. Найти эти числа.

294. Продано некоторое количество муки двух сортов, причем средняя продажная цена оказалась 34 коп. за 1 *кг*. Количество проданной муки первого сорта составило $\frac{5}{12}$ количества второго сорта. Мука первого сорта продавалась по 46 коп. за 1 *кг*. Найти цену муки второго сорта.

295. Из колхоза в город, до которого 48 *км*, отправились одновременно колхозник на лошади со скоростью 7 *км/ч* и письмоносец на велосипеде со скоростью 13 *км/ч*. Через сколько часов остаток пути для письмоносца будет в 3 раза меньше, чем остаток пути для колхозника?

VI. Разные задачи

Восстановить пропущенные цифры:

296.

```
      . , 3 .
      . . , 4
  ---------------
      . . .
  . . . 0 .
  ---------------
  . . . . . 4
```

297.

```
  . . , .
    2, . 7
  ---------
  . . . .
  . . .
  ---------
  . . 8 3 5
```

298. 977,6 : 3, . 5 = 3. . , 8.

299. В двух сосудах находится по 540 *л* воды. Из первого сосуда вытекает 25 *л* в минуту, а из второго 15 *л* в минуту. Через сколько минут во втором сосуде останется воды в 6 раз больше, чем в первом?

300. К делимому прибавили 10, а делитель умножили на 10, частное, однако, не изменилось. Найти первоначальное делимое. Чему может быть равен делитель?

301. Указать такое натуральное число, начиная с которого 12 последующих чисел являются составными.

302. Найти такое смешанное число, чтобы от деления его целой части на $\frac{7}{30}$ получилось в частном 150, а от деления его дроби на $\frac{7}{30}$ получилось в частном 2.

303. Найти такое смешанное число, чтобы от деления его целой части на $\frac{11}{200}$ получилось в частном 200, а от деления его дроби на $\frac{11}{200}$ получилось в частном 5.

304. Найти смешанное число такое, что от деления его целой части на $\frac{8}{225}$ получается 900, а от деления дробной части на $\frac{8}{225}$ получается 15.

305. Быстро установить, что дроби

$$\frac{23}{99}, \frac{2323}{9999}, \frac{232323}{999999}$$ равны между собой.

306. Найти дробь, равную $\frac{5}{7}$, чтобы сумма числителя и знаменателя ее равнялась 72.

307. Найти несократимую дробь, зная, что произведение ее числителя и знаменателя равно 550 и что эта дробь может быть выражена конечной десятичной дробью.

308. Шестизначное число имеет крайней левой цифрой 5. Откинув эту цифру слева и написав ее в конце справа, получили число, которое в 4 раза меньше первоначального. Найти первоначальное число.

309. Шестизначное число оканчивается цифрой 2. Откинув эту цифру в конце числа и написав ее в начале числа, получим число, в 3 раза меньшее первоначального. Найти первоначальное число.

310. В 12 *ч* дня часовая и минутная стрелки совпадают. Через какое наименьшее число минут стрелки вновь совпадут?

311. Если товар сначала подорожал на 10%, а затем подешевел на 10%, то когда цена его была ниже: до вздорожания или после снижения?

312. Если к задуманному трехзначному числу прибавить 12 и получившееся число разделить на 7, то в остатке получится 5. Если к тому же задуманному числу прибавить 14 и получившееся число разделить на 9, то остаток от деления будет 5. Если же к задуманному числу прибавить 18 и полученное число разделить на 13, то в остатке опять будет 5. Найти задуманное число.

313. Если от задуманного трехзначного числа отнять 11 и получившееся число разделить на 11, то в остатке получится 4. Если же от того же задуманного числа отнять 8 и получившееся число разделить на 8, то остаток от деления будет равен 4. Если же от задуманного числа отнять 7 и получившееся число разделить на 7, то остаток опять будет равен 4. Найти задуманное число.

314. Из восьми внешне совершенно одинаковых монет 7 — золотых; одна монета — фальшивая, несколько легче остальных. Требуется при помощи не более чем двух взвешиваний на чашечных весах, не пользуясь гирями, найти фальшивую монету. Как это сделать?

315. Брат и сестра измерили шагами длину и ширину огорода прямоугольной формы. Когда брат шел по длинной стороне, а сестра по короткой стороне прямоугольника, они сделали вместе 270 шагов. Потом брат шел по короткой стороне, а сестра по длинной стороне огорода, и тогда они сделали вместе 290 шагов. Длина шага брата равна 0,8 *м*, а длина шага сестры равна 0,6 *м*. Найти площадь огорода.

316. Две машинистки напечатали рукопись. Одна машинистка в час печатала в среднем 12 страниц, а другая — 10 страниц. Сколько страниц в рукописи, если известно, что первая машинистка начала работу на 4 *ч* раньше, чем вторая, и что они закончили работу одновременно, причем первая машинистка напечатала вдвое больше страниц, чем вторая?

317. Две машинистки получили за работу всего 25 руб., причем одна перепечатала текст, а другая таблицы. Страниц текста было в 2,5 раза больше, чем страниц

таблиц, но страница таблиц была оплачена на $66\frac{2}{3}\%$ дороже страницы текста. Сколько денег должна получить каждая?

318. Куплено библиотекой на равные суммы несколько одинаковых книг по физике и несколько одинаковых книг по математике, причем книг по физике куплено на 20 экземпляров меньше, чем по математике. Сколько куплено книг по физике и по математике, если книга по физике стоила 63 коп., а по математике 35 коп.?

319. Магазин продал кусок ткани в течение четырех дней. В первый день было продано $\frac{1}{6}$ всего куска и еще 5 *м*, во второй — 20% остатка и еще 10 *м*, а в третий день — 25% нового остатка и еще 9 *м* и в четвертый день — $\frac{1}{3}$ того, что осталось после продажи в третий день, и остальные 13 *м*. Сколько метров было в куске?

320. База отпустила четырем столовым картофель. Первой столовой отпущено 12,5% всего картофеля и еще 10 *кг*, второй — $\frac{10}{31}$ остатка и еще 40 *кг*, третьей — 40% нового остатка, четвертой столовой — 75% третьего остатка и остальные 57 *кг*. Сколько картофеля отпущено всем четырем столовым?

321. В хозяйстве есть куры и овцы. Сколько тех и других, если известно, что у всех вместе 19 голов и 46 ног?

322. Участок под клубникой имеет форму прямоугольника, длина которого в 3 раза больше ширины, окружен оградой, отстоящей от сторон участка на 2 *м*. Площадь, ограниченная оградой, на 128 *кв. м* больше площади самого участка. Определить длину всей ограды.

323. В кошельке десять 2-копеечных и 3-копеечных монет. Сколько тех и других монет в отдельности, если всего было 26 коп.?

324. В класс принесли партию учебников и задачников, всего на 14 руб. 64 коп. Стоимость одного учебника 42 коп., а задачника 24 коп. Сколько принесли учебников и сколько задачников, если всего принесли 46 книг?

325. В магазине было два куска ткани. Цена ткани первого куска 6 руб. 50 коп. за метр, второго — 5 руб. 50 коп. за метр. Сколько метров ткани было в каждом куске, если вместе в них было 70 *м* и стоили они 425 руб.?

326. Имеются два куска ткани различного сорта. Первый кусок, ценой по 3 руб. за метр, стоит на 7 руб. 50 коп. дешевле второго; второй кусок материи стоимостью по 4 руб. 50 коп. за метр, короче первого на 1,5 *м*. Найти стоимость каждого куска.

327. Сколькими нулями оканчивается число, равное произведению первых 100 натуральных чисел, т. е. произведению $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$. (Решение задачи объяснить.)

328. Какой цифрой оканчивается произведение всех нечетных двузначных чисел? всех нечетных пятизначных чисел?

329. Пионерский отряд должен прибыть из города A в город B через 8 дней. Спустя два дня после выхода его из города A в город B вышел второй отряд, который должен прибыть в B через 5 дней. Через сколько дней второй отряд догонит первый?

330. Два путника, выйдя одновременно из A, прибыли в B. Первый путник первую половину времени, затраченного на переход, шел по 5 *км/ч*, а затем делал по 4 *км/ч*. Второй же путник первую половину пути прошел со скоростью 4 *км/ч*, а затем шел по 5 *км/ч*. Кто из них раньше прибыл в B?

331. Двое одновременно отправились из A в B. Первый поехал на велосипеде, второй — на автомобиле со скоростью, в 5 раз большей скорости первого. На полпути с автомобилем произошла авария, и оставшуюся часть пути автомобилист прошел пешком со скоростью, в 2 раза меньшей скорости велосипедиста. Кто из них прибыл раньше в B?

АЛГЕБРА

I. Задачи на вычисление

Найти быстро результат:

332. $\dfrac{m^2(m+n^2)\cdot(m^3-n^6)(m^2-n)}{m^2+n^2}$, где $m=4$, $n=16$.

333. $a^2(a+b^2)(a^4-b^{10})(a^2-b)$, где $a=5$, $b=25$.

334. Вычислить $0{,}001\,a^3b^2 - 500\,a^2b^3$, если a равно наибольшему двузначному отрицательному числу; b равно наименьшему целому числу, заключенному между $-2{,}5$ и $-5{,}3$.

335. Написать частное от деления разности четвертых степеней чисел x и y на произведение суммы их первых

степеней на сумму их квадратов. Вычислить, подставляя числа: 1) $x = -1$; $y = 2$; 2) $x = 0$; $y = -0{,}5$; 3) $x = -5$; $y = -6$.

336. Вычислить $8\frac{16}{23}x^2y^3 - 0{,}02x^3y^2$, если x равен наибольшему целому числу, заключенному между числами $-9{,}3$ и $-15{,}1$, а y — наименьшему простому числу в третьем десятке натуральных чисел.

337. Показать, что пятая степень удвоенной разности чисел x и y на 6 меньше 5, если $x = 0{,}5$; $y = 1$.

338. Найти число, обратное частному от деления разности квадратов чисел x и y на сумму кубов тех же чисел, если $x = -11$; $y = -1$.

339. Вычислить утроенное частное от деления разности кубов чисел a и x на квадрат суммы тех же чисел, если $a = -9$; $x = -1$.

340. Вычислить $\frac{5^4x^4 - 0{,}99x - 0{,}0199}{1000x^3 - 1}$ сначала при $x = -0{,}02$, а затем при $x = +0{,}1$.

341. Вычислить $\frac{9a^2 - 3a + 1}{27a^3 + 1}$, один раз считая a равным наибольшему целому отрицательному числу и второй раз при $a = -\frac{1}{3}$.

342. Вычислить $\frac{5^3a^5 - 1000a^3 - 8{,}9896}{a^4 - 3a^2 - 4}$ при $a = -0{,}2$, а затем при $a = -2$.

343. Вычислить $\frac{8x^3 + 62}{4x^2 - 4x + 1}$ сначала при x, равном наибольшему отрицательному двузначному числу, а затем при x, равном 0,5.

344. Что больше и на сколько: 2 или девятая часть куба утроенной суммы чисел a и b, если $a = -2$ и $b = 1$?

345. Что больше и на сколько: утроенная разность квадратов чисел a и x или удвоенная разность квадратов тех же чисел, если a равно наибольшему двузначному отрицательному числу и x — наименьшему двузначному отрицательному числу?

346. Написать: 1) полусумму четвертых степеней чисел a и b и 2) квадрат полусуммы квадратов тех же чисел.

Установить: числовое значение какого из двух выражений больше, подставив: 1) $a = -1$; $b = 0{,}5$; 2) $a = 0{,}2$; $b = -3$; 3) $a = 3$; $b = 0$.

347. Что больше и на сколько: полусумма кубов чисел a и x или куб полусуммы тех же чисел, если a — наименьшее четное число, заключенное между — 19,5 и —13,5, и x — наибольшее нечетное отрицательное двузначное число.

348. Вычислить:

$$\left(\frac{1648}{1751}+\frac{131\,313}{686\,868}\right)\cdot\left(\frac{131\,313}{686\,868}-\frac{1648}{1751}\right).$$

349. Вычислить:

$$\left(\frac{1284}{1391}+\frac{212\,121}{656\,565}\right)\cdot\left(\frac{212\,121}{656\,565}-\frac{1284}{1391}\right).$$

350. Какой цифрой оканчивается каждое из следующих выражений, если произвести указанные действия:

а) $3^3+4^3+5^3$; б) $3^{13}+10^{13}+18^{13}$; в) $14^{23}+23^{23}+70^{23}$;

г) $21^4+34^4+46^4$; д) $15^5+26^5+39^5$; е) $2^{3^{n+1}}$;

ж) $3^{2^{n+1}}$; з) $4^{2^{n+1}}$; и) $5^{7^{n+2}}$?

351. Вычислить:

а) $(27^{10}-5\cdot 81^4\cdot 3^{12}+4\cdot 9^8\cdot 3^8):(41\cdot 3^{24})$;

б) $(10^{12}+5^{11}\cdot 2^9-5^{13}\cdot 2^8):(4\cdot 5^5\cdot 10^6)$;

в) $(12\cdot 5^{2n+1}-8\cdot 5^{2n}+4\cdot 5^{2n-1}):(4\cdot 5^{2n-2})$;

г) $(36\cdot 18^n-8\cdot 2^{n-4}\cdot 9^n-3^{n+1}\cdot 6^{n+1}):18^{n-1}$.

352. При каком значении x многочлен $7{,}4x-8-$ $-[-5{,}6x+(-2{,}4x+7)-11{,}92]$ равен 0?

353. При каком значении x многочлен $4{,}3+[-3{,}4x-$ $-(8x+6)-2{,}3]-(2{,}6x-1{,}2)$ равен нулю?

354. Найти число по следующим данным: а) оно делится без остатка на 5; б) если его умножить на цифру единиц, то получится число, на 363 большее суммы цифр искомого числа.

355. Написать общую формулу чисел, которые как при делении на 3, так и при делении на 4 дают в остатке 1. (Ответ объяснить.)

356. Написать общую формулу числа, которое как при делении на 6, так и при делении на 8 дает в остатке 5.

II. Задачи на доказательство

357. Доказать, что сумма двух нечетных последовательных чисел делится на 4.

358. Доказать, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.

359. Доказать, что разность между квадратом нечетного числа и единицей делится на 8.

360. Доказать, что сумма четырех последовательных натуральных чисел не может быть простым числом.

361. Написать в общем виде произведение трех последовательных натуральных чисел и объяснить, что оно во всяком случае делится на 6, а может быть даже на 24.

362. Доказать, что два натуральных числа a и b обладают следующим свойством: либо a, либо b, либо $a + b$, либо $a - b$ делится на 3.

363. Доказать, что если два числа при делении на 3 дают в остатке 1, то произведение их дает при делении на 3 тот же остаток 1.

364. Доказать, что если при делении на 3 одно из двух чисел дает остаток 1, а другое — остаток 2, то произведение их дает при делении на 3 остаток 2.

365. Если одно из чисел при делении на 9 дает в остатке 5, а другое при делении также на 9 дает в остатке 4, то их произведение при делении на 9 дает в остатке столько же, сколько дает произведение остатков.

Примечание. Результат получится тот же, если числа 5 и 4 в условии заменить другими числами, например 3 и 7; 5 и 8 и т. п. На этом свойстве основана проверка произведения натуральных чисел при помощи цифры 9.

366. Доказать, что разность трехзначных чисел, из которых одно написано теми же цифрами, что и другое, но в обратном порядке, делится на 9 и 11.

367. Даны два четырехзначных числа, у одного из которых вторая и третья цифры — нули, и другое — написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Доказать, что разность делится на 27 и 37.

368. Написать в общем виде четырехзначное число, цифра сотен которого равна 0. Показать затем, что разность между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, а) делится на 9; б) не делится на 111.

369. Доказать, что $(n + 2)(n^2 + n + 6)$ делится на 6.

370. Доказать, что два последовательных нечетных числа — числа взаимно простые.

371. Доказать, что числа:

1) $17^5 + 24^4 - 13^{21}$ и 2) $2^{16} + 3^{40} + 5^{39} + 2 \cdot 4^7$ кратны 10;

3) $10^n + 8$ кратно 18; 4) $5^{5n-2} + 3$ кратно 4.

Примечание. В упражнениях 3) и 4) n натуральное.

372. Доказать, что при любом натуральном n дробь $\frac{14n+3}{21n+4}$ несократима.

373. Показать, что

$$(100 - a)(100 - b) = 100[(100 - a) - b] + ab$$

и что двузначные числа, близкие к 100, удобно перемножать так: $86 \cdot 97 = (86 - 3) \cdot 100 + 14 \cdot 3 = 8342$; $14 = 100 - 86$; $3 = 100 - 97$.

374. Доказать, что: 1) два числа $(10a + b)$ и $(10a + c)$, т. е. такие числа, у которых число десятков одинаковое, можно перемножить по формуле $10a[(10a + b) + c] + bc$; 2) два числа $(10a + b)$ и $(10a + c)$, у которых число десятков одинаковое, а сумма единиц $(b + c)$ равна 10, можно перемножать по формуле $100a(a + 1) + bc$, т. е. число десятков a надо умножить на следующее за ним число $(a + 1)$, и к произведению приписать произведение единиц.

375. Доказать, что численная величина выражения

$$(x^2 - ax + b)^2 + 2(x^2 - ax + b)(ax - b) + (ax - b)^2$$

не зависит от a и b.

376. Доказать, что численная величина многочлена

$$(x^3 + ax - b)^3 - 3(x^3 + ax - b)^2(ax - b) + 3(x^3 + ax - b)(ax - b)^2 - (ax - b)^3 - (x^6 + 5x^3 + 25)(x^3 - 5)$$

постоянна.

III. Общий раздел

377. Найти условие, при котором разность между данным двузначным числом и числом, написанным теми же цифрами, но в обратном порядке, представляет точный квадрат натурального числа.

378. Найти общую формулу числителя и знаменателя таких дробей, которые после уменьшения как числителя на 1, так и знаменателя на 1 и после сокращения обращаются в $\frac{1}{2}$.

379. Найти общую формулу числителя и знаменателя таких дробей, которые после увеличения их числителя и

знаменателя на 1 и после сокращения обращаются в $\frac{1}{3}$.

380. Может ли сумма трех последовательных натуральных чисел быть числом простым?

381. Написать все двузначные числа, которые увеличиваются на 36, если переставлять местами цифры этих чисел.

382. Написать все двузначные числа, которые увеличиваются в 8,5 раза, если между цифрами этих двузначных чисел вставить нуль.

383. Решить уравнения:

а) $4x-1=7$; б) $|4x-1|=7$; в) $|4x-1|=-5$;

г) $|x-2|+2x=2$; д) $|x-8|+x=5$; е) $|x-3|-x=7$;

ж) $|2x-11|+x=8$; з) $|5x-2|+x=10$;

и) $|x-3|+|x+2|=7$; к) $|3x-4|+x=4$;

л) $|x|=3(x-3)$; м) $|x-4|-|2x+3|=2$;

н) $|x+4|+|x-1|=5$.

384. Найти все целые числа, удовлетворяющие каждому из неравенств, и отметить их точками на числовой прямой:

а) $|x|\leqslant 5$; б) $|x-8|\leqslant 0$; в) $|x-3{,}5|<2$; г) $|x|>5$;

д) $|x-4|>5$; е) $|x+1|>3$; ж) $|2x|-3{,}4>0$;

з) $3<|x|<7$; и) $|3x-1|<-5$; к) $|7x+1|+6>0$.

385. Доказать, что $43^{43}-17^{17}$ делится без остатка на 10.

386. Найти быстро, что больше: A или B?

$$A=4+\frac{5}{8}+\frac{6}{8^2}+\frac{3}{8^3}+\frac{7}{8^4};$$

$$B=4+\frac{5}{8}+\frac{5}{8^2}+\frac{7}{8^3}+\frac{6}{8^4}.$$

387. Если x может принимать любые числовые значения — отрицательные, нуль, положительные, то при каких x $x^2>x^3$?

388. Какое из выражений больше и на сколько:

$$16\cdot 0{,}25^{3n-2}:\left(-0{,}5\cdot 0{,}25^{3n-4}\right) \text{ или}$$

$$81\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{12-4n}\cdot 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{4n-7}?$$

Каким натуральным числом может быть здесь n?

389. Какое из выражений больше:

$$-4 \cdot 0{,}5^{2n-7} \cdot (12 \cdot 0{,}5^{10-2n})$$

или

$$27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1} : \left[0{,}5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5x-3}\right]?$$

Какими натуральными числами могут быть выражены n и x?

ГЕОМЕТРИЯ

I. Задачи на вычисление

390. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 80°; найти угол между основанием и высотой, проведенной к боковой стороне треугольника.

391. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 32°. Найти угол между основанием этого треугольника и высотой треугольника, проведенной из вершины угла при основании.

392. В треугольнике ABC из вершины C проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов. Первая биссектриса образует со стороной AB угол, равный 126°. Какой угол образует с продолжением стороны AB вторая биссектриса?

393. В равнобедренном треугольнике угол между биссектрисой угла при вершине и биссектрисой угла при основании равен 130°. Найти углы треугольника.

394. В треугольнике ABC проведены биссектриса BM и высота BD. В треугольнике BMC проведена высота MK. BM образует с BD угол в 20°, а с MK угол в 50°. В каком отношении находятся внешние углы треугольника ABC?

395. Угол между высотой прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла, и биссектрисой прямого угла равен 12°. Найти острые углы данного прямоугольного треугольника.

396. Один из углов прямоугольного треугольника равен 32°. Из вершины прямого угла проведены медиана, биссектриса и высота. Найти углы: а) между медианой и биссектрисой; б) между биссектрисой и высотой.

397. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 118°. Чему равен угол между высотами, проведенными из вершин меньших углов?

398. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 40°. Чему равен угол, образованный высотами треугольника, проведенными к его боковым сторонам?

399. Внешние углы треугольника пропорциональны числам 6, 7 и 11. Найти угол между высотами этого треугольника, проведенными из вершин его меньших внутренних углов.

400. В треугольнике ABC $AB = BC$; $AC = 10$ *см*. Из точки D, середины AB, проведен перпендикуляр DE к стороне AB до пересечения с BC в точке E, и точка E соединена с A. Периметр треугольника ABC равен 40 *см*. Найти периметр треугольника AEC.

401. На плоскости расположены 7 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две данные точки проводят прямые линии. Сколько всего проведено прямых линий?

402. Сколько всего диагоналей можно провести в многоугольнике, имеющем 103 стороны. Ответ объясните.

403. В многоугольнике (выпуклом), имеющем 100 вершин, вершины пронумерованы по движению часовой стрелки (1, 2, 3, ...). Диагональю, соединяющей 42-ю и 81-ю вершины, многоугольник разрезан на два многоугольника. Сколько сторон имеет каждый из полученных многоугольников?

404. В многоугольнике, имеющем n сторон ($n > 5$), вершины пронумерованы по движению часовой стрелки ($1, 2, 3, \ldots, n$). Через 1-ю вершину проведены все диагонали. Затем от данного многоугольника отрезаны два треугольника с вершинами 1, 2, 3 и с вершинами 1, n, $n-1$. Сколько всего диагоналей можно провести в оставшемся многоугольнике?

II. Задачи на доказательство

405. Доказать: если две стороны и медиана, проведенная к одной из этих сторон, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.

406. Доказать, что если угол, биссектриса и высота, проведенные из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, биссектрисе и высоте другого треугольника, то такие треугольники равны.

407. Три населенных пункта A, B и C расположены так, что пункт B находится на 3 *км* к северу от A, C — в 5 *км* к северо-западу от A. Три других населенных пункта K, M и N расположены так, что пункт K находится в 3 *км* к северо-востоку от N и M — в 5 *км* к востоку от N. Сделать чертеж и доказать, что расстояние между пунктами B и C такое же, как между пунктами K и M.

408. Три населенных пункта B, C и D расположены так, что C находится в 7 *км* к юго-западу от B, а поселок D — в 4 *км* на восток от B. A, K и M — три других поселка, причем поселок M находится в 4 *км* к югу от поселка K, а поселок A — в 7 *км* к юго-востоку от M. Сделать чертеж и доказать, что расстояние между пунктами C и D такое же, как между K и A.

409. Если медиана треугольника является в то же время его биссектрисой, то треугольник равнобедренный. Доказать.

410. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 36°. Доказать, что одна из биссектрис этого треугольника делит данный треугольник на два равнобедренных треугольника.

411. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°. Доказать, что в этом треугольнике отрезок перпендикуляра, проведенного к гипотенузе через ее середину до пересечения с катетом, втрое меньше большего катета данного прямоугольного треугольника.

412. На одной стороне угла A отложены отрезки AB и AC, а на другой — отрезки $AB_1 = AB$ и $AC_1 = AC$. Доказать, что отрезки BC_1 и B_1C пересекаются на биссектрисе угла A.

413. В прямоугольном равнобедренном треугольнике сумма расстояний от произвольной точки гипотенузы до катетов равна длине одного из катетов. Доказать.

414. Внутри тупоугольного треугольника ABC через вершину тупого угла A проведены до пересечения с BC отрезок AD, который составляет с AB угол, равный углу C, и отрезок AE, который составляет с AC угол, равный углу B. Доказать, что треугольник ADE равнобедренный.

415. В треугольнике ABC на продолжении стороны AB отложен отрезок BM, равный стороне BC. Точки M и C соединены отрезком прямой. Доказать, что прямая MC параллельна биссектрисе угла ABC.

416. В равностороннем треугольнике ABC проведена высота BD и продолжена за вершину B до точки K так, что $KB = CA$. Точка K соединена с точками A и C. Доказать, что сумма углов ABC и AKC равна прямому углу.

417. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M так, что $AK = AC, BM = BC$. Доказать, что $\angle MCK = 45°$.

418. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена медиана CD. Через ее конец — точку D проведена прямая, перпендикулярная к медиане, до пересечения с катетом AC в точке E и продолжением катета BC в точке F. Отрезок EF в точке M разделен пополам. Точка M соединена с C. Доказать, что $CM \perp AB$.

419. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Через точку D проведена прямая до пересечения со стороной AC в точке E так, что угол CDE равен углу BAC. Доказать, что отрезки BD и DE равны.

420. Доказать, что если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то один из его углов равен сумме двух других.

421. В равнобедренном треугольнике ABC на продолжении основания BC за точку C взята точка D. Доказать, что угол ABC больше угла ADC.

422. Внутри треугольника ABC взята точка M. Доказать, что угол BMC больше угла BAC.

423. В разностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Из вершины C проведена прямая, параллельная BD, до пересечения с продолжением стороны AB в точке F. Доказать, что треугольник BCF — равнобедренный.

III. Задачи на построение

424. На прямой AB найти точку, сумма расстояний которой от двух данных точек M и N была бы наименьшей.

425. Дана прямая AB и точки M и N. Найти на AB такую точку, чтобы разность ее расстояний от точек M и N была наибольшая.

426. Начертите разносторонний треугольник MNP. Найдите при помощи циркуля и линейки на стороне MN точку, одинаково удаленную от прямых NP и MP. (Построение объясните.)

427. В треугольнике найти точку, равноудаленную от всех его сторон.

428. Дан угол A и точки B и C, расположенные на одной стороне угла. Найти (построением) такую точку M, чтобы она находилась на одинаковом расстоянии от сторон угла и чтобы $MB = MC$.

429. Дан угол A и точки B и C, расположенные одна — на одной стороне угла и другая — на другой. Найти (построением) такую точку X, чтобы она находилась на одинаковом расстоянии от сторон угла и чтобы $BX = XC$.

430. Внутри данного угла найти точку, находящуюся от сторон данного угла на расстоянии, равном a. Указать два способа решения.

431. Через точки A и B провести две прямые так, чтобы угол между ними делился данной прямой MN пополам.

432. Дан угол ABC и точка M внутри него. Найти на сторонах данного угла такие точки D и E, чтобы $\triangle MDE$ имел наименьший периметр.

433. Построить равнобедренный треугольник по высоте, проведенной на боковую сторону, и отрезку боковой стороны, заключенному между основанием высоты и вершиной угла при основании.

434. Построить равнобедренный треугольник по основанию и высоте, проведенной на боковую сторону.

435. Построить прямоугольный треугольник по высоте, проведенной на гипотенузу, и биссектрисе прямого угла.

436. Построить равнобедренный треугольник по данному периметру и высоте, опущенной на основание.

437. Построить треугольник по углу A, стороне c и сумме сторон a и b.

438. Построить прямоугольный треугольник по катету и разности между гипотенузой и другим катетом.

439. Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу, и разности других сторон.

440. Построить треугольник по b, h_a и $a + c$.

441. Построить треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из этих сторон.

442. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из этих сторон.

443. Построить равнобедренный треугольник по его боковой стороне a и высоте h_a, проведенной к ней.

444. Построить прямоугольный треугольник по высоте, проведенной из вершины прямого угла, и одному из катетов.

VII

КЛАСС

АЛГЕБРА

I. Разложение на множители, сокращение дробей

445. a^3+2a^2-3. **446.** a^3+a^2+4. **447.** x^3-7x-6.

448. a^5+a+1. **449.** a^3-6a^2-a+30.

450. $ab(a-b)-ac(a+c)+bc(2a+c-b)$.

451. $bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-c)+ab(c+d)(a-b)$.

452. $(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3$.

453. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$.

454. $(x^2+4x+8)^2-3x(x^2+4x+8)+2x^2$.

455. $(x^2+6x-1)^2+2x^2+x^4+2(x^2+6x-1)(x^2+1)$.

456. $a^2x[2(x-1)-b^3]+2[2+(b^3-2)x]-b^6$.

457. $n[n^2-4(a+n)+x(a-n)]-a(x-4)(x+4)$.

458. $\dfrac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}$. **459.** $\dfrac{8a^{n+2}+a^{n-1}}{16a^{n+4}+4a^{n+2}+a^n}$.

460. $\dfrac{x^4-3x^2+1}{(3x^2+3x-3)^2}$. **461.** $\dfrac{x^4+4}{a(x^2+2)-2ax-(x-1)^2-1}$.

462. $\dfrac{n^4+64}{x(n+2)^2-4(n-x)-n^2-8}$. **463.** $\dfrac{x^{12}-128x^6+4096}{(x^3-4x^2+8x-8)^2}$.

Вычислить:

464. $\dfrac{2^{19}\cdot 27^3+15\cdot 4^9\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+12^{10}}$.

465. $\dfrac{5\cdot 4^{15}\cdot 9^9-4\cdot 3^{20}\cdot 8^9}{5\cdot 2^9\cdot 6^{19}-7\cdot 2^{29}\cdot 27^6}$.

II. Составление уравнений и их решение

466. На доске написано уравнение $5(\ldots+3x)(x+1)-4(1+2x)^2=80$, причем в ответе сказано, что $x=2$. Найти недостающее число.

467. В задачнике предложено для решения уравнение: $3(2y+\ldots)(3y+2)-2(3y+1)^2=43$, причем второе слагаемое в первой скобке случайно пропущено.

Найти недостающее число, если в ответе указано, что $y = 1$.

Решить уравнения:

468. $\frac{5-x}{4x^2-8x}+\frac{7}{8x}=\frac{x-1}{2x(x-2)}+\frac{1}{8x-16}$.

469. $x-a^2x-\frac{b^2}{b^2-x^2}+a=\frac{x^2}{x^2-b^2}$.

470. $-b^2x+x-\frac{a}{x-a}-b=\frac{x}{a-x}$.

471. $6ax^2+4ax-9x-6=0$.

472. $9ax^3-18x^2-4ax+8=0$.

473. Каковы должны быть значения a и b, чтобы выражение $a(2x+3y)+b(2x-3y)$ обращалось в нуль при $x=1$, $y=1$? Указать какие-нибудь две пары таких значений a и b.

474. Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает квадрат натурального числа. Найти все такие числа.

475. Турист, идущий из деревни на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 *км*, рассчитал, что опоздает к поезду на 40 *мин*, если будет двигаться с прежней скоростью. Поэтому остальной путь он проходит со скоростью 4 *км/ч* и прибывает на станцию за 45 *мин* до отхода поезда. Каково расстояние от деревни до станции?

476. Пешеход, идущий к поезду, пройдя за первый час 3,5 *км*, рассчитал, что, двигаясь с такой скоростью, он опоздает на 1 *ч*. Поэтому он остальной путь проходит со скоростью 5 *км/ч* и приходит за 30 *мин* до отхода поезда. Определить, какой путь должен был пройти пешеход?

477. Турист выехал на велосипеде из A, чтобы прибыть в B в назначенное время. Проехав первые 10 *км* за 40 *мин*, он рассчитал, что, продолжая движение с той же скоростью, он приедет на 24 *мин* раньше назначенного срока. Если же он уменьшит свою скорость на 3 *км/ч*, то даже в этом случае он прибудет в B на 10 *мин* раньше срока. Чему равно расстояние между A и B?

478. Из города M в город N вышел автобус со скоростью 40 *км/ч*. Через четверть часа он встретил ехавшую из города N легковую машину, делавшую в сред-

нем по 50 *км/ч*. Эта машина доехала до города *M* и через 15 *мин* после того выехала обратно в город *N*. Не доезжая 20 *км* до города *N*, машина обогнала автобус. Найти расстояние между городами *M* и *N*.

479. Пловец плывет вверх против течения Невы. Возле Республиканского моста он потерял флягу. Проплыв еще 20 *мин* против течения, он заметил свою потерю и вернулся догонять флягу; догнал ее он возле моста Лейтенанта Шмидта. Определить скорость течения Невы, если расстояние между мостами 2 *км*.

480. Самолет летел сначала со скоростью 780 *км/ч*. Когда ему осталось пролететь на 680 *км* меньше, чем он пролетел, он изменил скорость и стал лететь со скоростью 830 *км/ч*. Средняя скорость его на всем пути оказалась равной 800 *км/ч*. Какое расстояние пролетел самолет?

481. Из города *A* в город *B* вышел автобус со скоростью 48 *км/ч*. Через полчаса его обогнал мотоциклист, ехавший со скоростью 60 *км/ч*. Мотоциклист прибыл в город *B* и через 12 *мин* после того выехал обратно по направлению к городу *A*. На расстоянии 12 *км* от города *B* он встретил автобус. Найти расстояние от *A* до *B*.

482. Из двух городов, расстояние между которыми 63 *км*, вышли одновременно два пешехода и встретились через 9 *ч*. Определить среднюю скорость каждого пешехода, зная, что, если бы первый шел в 1,5 раза скорее, а второй — в 2 раза скорее, они встретились бы через 5 *ч* 15 *мин*.

483. Мотоциклист со скоростью 62 *км/ч* отправился из пункта *M* через некоторое время после выезда автобуса, скорость которого 55 *км/ч*. Разница во времени выходов такова, что к месту назначения, пункту *K*, они должны прибыть одновременно. Пройдя $\frac{2}{3}$ пути от *M* до *K*, автобус уменьшил скорость до 27,5 *км/ч*, а потому мотоциклист догнал автобус уже на расстоянии 124 *км* от *K*. Найти расстояние от *K* до *M*.

484. Автомобиль в 8 *ч* утра вышел из *A* и, идя со скоростью 64 *км/ч*, должен был прибыть в *B* к определенному сроку. В 11 *ч* произошла неожиданная остановка на 50 *мин* из-за ремонта шоссе. После этой остановки автомобиль отправился по другой дороге, вследствие чего его путь увеличился на 31 *км*. Хотя после остановки

автомобиль шел уже со скоростью 70 *км/ч*, он все же опоздал в *B* на 1 *ч* 5 *мин*. Какое расстояние проехал автомобиль, чтобы прибыть из *A* в *B*?

485. Пароход шел по течению реки со скоростью 24 *км/ч*. При движении парохода обратно (против течения) от него отделился плот. Когда с этого момента пароход прошел против течения 15 *км*, этот плот оказался на расстоянии 20 *км* от него. Определить скорость парохода в стоячей воде.

486. Узнать, через сколько минут после того, как часы показывали 4 *ч*, минутная стрелка догонит часовую?

487. Несколько девочек, все различного возраста, собирали в лесу белые грибы. Собранные грибы они разделили так: самой младшей дали 20 грибов и 0,04 остатка, следующей за ней по возрасту — 21 гриб и 0,04 нового остатка, третьей — 22 гриба и 0,04 следующего остатка и т. д. Оказалось, что все получили поровну. Сколько было собрано грибов и сколько было девочек?

488. Несколько мальчиков ловили рыбу. Весь улов они разделили так: первый получил 2 штуки и 0,1 остатка, второй — 4 штуки и 0,1 второго остатка, третий — 6 штук и 0,1 третьего остатка, четвертый — 8 штук и 0,1 нового остатка и т. д. Оказалось, что все получили поровну. Сколько штук рыбы было распределено? Сколько было мальчиков?

489. Некто оставил завещание, согласно которому старший сын получает из полного наследства 100 франков и 0,1 остатка, второй — 200 франков и 0,1 нового остатка, третий —300 франков и 0,1 следующего остатка и т. д. до последнего. Доли всех сыновей оказались равными. Найти размер оставленного наследства и число сыновей. (Старинная французская задача.)

490. Крестьянка продала из принесенных ею на рынок яиц первому покупателю половину всех яиц без 6. Второму — третью часть остатка без 6. Третьему — четвертую часть остатка без 6. После того у крестьянки осталась не проданной еще половина всех принесенных на рынок яиц. Сколько яиц принесла на рынок крестьянка и сколько продала она каждому покупателю? (Старинная задача.)

491. По окончании спектакля в театре 174 зрителя разошлись пешком, остальные разъехались на 18 авто-

бусах, причем в каждый автобус вошло на 5 человек больше, чем в нем было мест для сидения. Если бы зрители, уехавшие на автобусах, входили в каждый автобус по числу мест для сидения, то понадобилось бы еще 3 автобуса, но в последнем осталось бы 6 мест свободных. Сколько всего зрителей было в театре?

492. На двух чашках весов, находящихся в равновесии, лежат дробинки двух разных калибров, но на каждой чашке только одного калибра. Всего дробинок 195. Если снять с одной чашки весов 11 дробинок, то для сохранения равновесия надо с другой чашки переложить на первую 2 дробинки. Сколько дробинок каждого калибра лежит на весах?

493. Отцу и матери вместе 80 лет. Их детям в это время было 13 лет, 10 лет и 6 лет. Через несколько лет сумма лет детей составила 59% суммы лет отца и матери. Сколько стало лет отцу и сколько матери, если известно, что отец старше матери на 4 года?

494. Пете дали стакан черного кофе. Он отпил $\frac{1}{5}$ стакана и долил молоком. Затем опять отпил $\frac{1}{5}$ стакана и вновь долил молоком. Выпив затем $\frac{3}{5}$ стакана, он подсчитал, что в оставшейся части кофе только на 28 *куб. см* больше, чем молока. Найти объем стакана.

495. Ученик задумал число, приписал к нему справа 2 и к полученному числу прибавил 14. К полученному числу приписал справа 3, а затем прибавил 52. Разделив полученное таким образом число на 60, он получил в частном число, на 6 большее задуманного числа, а в остатке двузначное число, написанное одинаковыми цифрами и притом такими, что число десятков равно как раз задуманному числу. Найти задуманное число.

496. Если к некоторой сумме денег прибавить через год $\frac{1}{12}$ ее, а в следующий — $\frac{1}{12}$ новой суммы, то первоначальная сумма за два года увеличится на 16 900. Найти первоначальную сумму.

497. Число A составляет 92% от числа B. Если B увеличить на 700, то оно будет больше A на 9% от увеличенного B. Найти эти числа.

III. Составление систем уравнений и их решение

498. Путь от A до B идет 3 *км* в гору, 6 *км* под гору и 12 *км* по ровному месту. Весь путь мотоциклист проделал за 1 *ч* 7 *мин*. Обратный путь, во время которого он ехал в гору, под гору и по ровному месту с той же скоростью, что и от A к B, он проделал за 1 *ч* 16 *мин*. Определить скорость мотоциклиста в гору, под гору, если на ровном месте он ехал по 18 *км/ч*.

499. Путь между городами A и B идет сперва по шоссе, а потом по грунтовой дороге. Двигаясь по шоссе со средней скоростью 45 *км/ч*, а по грунтовой дороге со скоростью 30 *км/ч*, автомашина прошла путь из A в B за 8 *ч* 40 *мин*. На обратном пути машина увеличила скорость по грунтовой дороге на 2 *км/ч*, а по шоссе уменьшила скорость на 5 *км/ч* и прошла путь от B до A за 9 *ч*. Определить длину всего пути от A до B и длину шоссе.

500. Моторная лодка прошла по течению реки от пристани Пашково до пристани Иваньково и затем против течения от пристани Иваньково, мимо пристани Пашково, до пристани Васильево и затратила на весь этот путь 9 *ч* 20 *мин*. После этого лодка за 9 *ч* прошла путь от пристани Васильево до пристани Иваньково и от пристани Иваньково до пристани Пашково. Определить расстояние от пристани Пашково до пристани Васильево, если скорость лодки в стоячей воде 10 *км/ч*, а скорость течения реки 2 *км/ч*.

501. В трех сосудах налита вода. Если $\frac{1}{2}$ воды первого сосуда перелить во второй, затем $\frac{1}{3}$ воды, оказавшейся во втором, перелить в третий и, наконец, $\frac{1}{4}$ воды третьего перелить в первый, то в каждом сосуде окажется по 6 *л*. Сколько было воды в каждом сосуде?

502. В трех сосудах налита вода. Если $\frac{1}{3}$ воды первого сосуда перелить во второй, затем $\frac{1}{4}$ воды, оказавшейся во втором, перелить в третий и, наконец, $\frac{1}{10}$ воды третьего перелить в первый, то в каждом сосуде окажется воды по 9 *л*. Сколько было воды в каждом сосуде?

503. Из двух баков начали одновременно отпускать бензин: из первого ежедневно по 16,5 *т*, а из второго по 11,4 *т*. К тому времени, когда из второго бака отпустили весь бензин, в первом еще осталось 25 *т*. Если бы из первого отпускали по 10 *т*, а из второго по 6 *т*, то бензина в обоих баках хватило бы на один и тот же срок. Сколько бензина было в каждом баке первоначально?

504. Завод выпускает радиоприемники стоимостью по 80 руб. и по 64 руб. Первая партия стоила 5760 руб., а вторая 6560 руб. Во второй партии более дорогих приемников было выпущено вдвое меньше, чем в первой, а всего во второй партии было на 17 приемников больше, чем в первой. Сколько приемников выпустил завод в обеих партиях вместе?

505. Антикварный магазин, купив два предмета на общую сумму 360 руб., продал их, получив 25% прибыли. За сколько был продан каждый предмет, если на первый была наценка 50%, а на второй 12,5%?

506. Имеются два куска ткани; 1 *м* ткани первого куска стоит 8 руб., а 1 *м* ткани второго куска — 12 руб. Стоимость всей ткани составляет 1200 руб. Если цену 1 *м* первого куска поднять на 30%, а второго — на 25%, то вся ткань стоила бы больше на $\frac{7}{32}$ ее новой стоимости. Узнать длину каждого куска.

507.[1] Найти два двузначных числа, обладающих следующими свойствами: а) если к большему искомому числу приписать справа нуль и за ним меньшее число, а к меньшему приписать большее число и затем нуль, то при делении первого из образовавшихся таким образом двух пятизначных чисел на второе получим в частном 2 и в остатке 590; б) разность между утроенным большим числом и учетверенным меньшим равна 23.

---

[1] Вторая часть условия задачи лишняя. Действительно, первая часть условия дает неопределенное уравнение.

$980x - 1999y = 590$; x и y — целые числа, поэтому общие решения этого уравнения:

$x = 1999t + 21$; $y = 980t + 10$, где t — произвольное целое число. В данном случае t может равняться только 0, так как x и y — двузначные числа. В восьмилетней школе не изучается решение неопределенных уравнений в целых числах, поэтому в задаче дано еще одно свойство искомых чисел.

IV. Задачи на доказательство

508. Доказать, что при любом натуральном n выражение $\frac{10^n+8}{9}$ равно целому числу.

509. Доказать, что при любом натуральном n выражение $\frac{10^n+2}{3}$ равно целому числу.

510. Доказать, что разность между кубом какого-либо целого числа и самим числом делится на 6.

511. Доказать, что при всяком целом n число $n(n+1)(2n+1)$ всегда делится на 6.

512. Доказать, что сумма двух нечетных последовательных чисел делится на 4 и всякое число, делящееся на 4, есть сумма двух нечетных последовательных чисел.

513. Доказать, что разность квадратов чисел, не делящихся на 3, делится на 3.

514. Доказать, что разность четвертых степеней двух чисел, из которых первое при делении на 5 дает остаток 1, а второе — 2, кратна 5.

515. Доказать, что число вида $n^5 - 5n^3 + 4n$, где n — натуральное число, делится на 120.

516. Доказать, что число вида $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n$, где n — положительное четное число, большее 4, делится на 384.

517. Доказать, что разность между квадратом числа, которое не делится на 3, и единицей делится на 3.

518. Доказать, что $(n-1)[(n^2+3n+1)^2-1]$ делится на 120 при любом натуральном n.

519. Доказать, что $n^3 + 3n^2 - n - 3$ делится на 48 при нечетном значении n.

520. Если разность двух нечетных чисел делится на 5, то какой цифрой оканчивается разность кубов этих чисел?

521. Доказать, что сумма квадратов трех последовательных целых чисел при делении на 3 дает остаток 2.

522. Доказать, что дробь, числитель которой — произведение четырех последовательных натуральных чисел, а знаменатель — произведение трех последовательных четных чисел, сократима на 24.

523. Доказать, что дробь $\frac{n^4-3n^2+1}{n^4-n^2-2n-1}$ при любых натуральных $n > 2$ правильная сократимая.

524. Доказать, что разность квадратов двух последовательных целых чисел есть число нечетное.

525. Доказать, что произведение четырех последовательных чисел, увеличенное на 1, есть точный квадрат.

526. Доказать, что произведение четырех последовательных четных чисел, увеличенное на 16, есть точный квадрат.

527. Доказать, что произведение трех последовательных целых чисел, сложенных со вторым из них, равно кубу этого числа.

528. 1) Доказать, что разность между трехзначным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, не может быть квадратом натурального числа.

2) Найти условие, при котором разность между данным двузначным числом и числом, написанным теми же цифрами, но в обратном порядке, представляет точный квадрат натурального числа.

529. Некоторое число есть произведение трех последовательных натуральных чисел. Сумма частных, полученных от деления этого числа на каждый из трех составляющих его множителей, равна 74. Найти число.

V. Разное

530. Найти два числа, зная их сумму 168 и общий делитель 24.

531. Если 4373 и 826 разделить на одно и то же число, то получим соответственно остатки 8 и 7. Чему равен делитель?

532. При каком условии разность двух дробей равняется их произведению? (Решите задачу в общем виде и приведите числовые примеры.)

533. При каком условии сумма двух дробей равняется их произведению? (Решите задачу в общем виде и приведите числовые примеры.)

534. Какие целые числа можно прибавлять к числителю и знаменателю дроби, не изменяя ее величины?

535. Какие две дроби дают произведение в 7 раз меньше, чем их сумма?

536. Шестизначное число начинается слева цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места слева на

последнее место справа, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

537. Даны формулы: $A=\frac{x+y}{x-y}$; $B=\frac{xy+py+px}{x+y+p}$; $C=\frac{x^3}{y^2}$. Как изменятся числовые значения A, B, C, если каждое из чисел x, y, p умножить на $n (n \neq 0)$?

538. Построить четырехугольник, вершины которого лежат в точках с координатами: (2; 1); (6; 8); (6; 1); (2; 8). Чему равна площадь этого четырехугольника? (За единицу принять отрезок, равный 0,5 *см.*)

539. Вершины прямоугольника лежат в точках с координатами: (3; 2); (11; 2); (11; 7). Построить прямоугольник и вычислить его площадь. (За единицу принять отрезок, равный 0,5 *см.*)

540. Найти такие правильные дроби, из которых каждая от уменьшения числителя и знаменателя на 1 обращается в $\frac{1}{2}$.

541. Найти двузначное число, равное утроенному произведению его цифр.

542. Квадрат двузначного числа содержит четное число десятков. Найти цифру единиц этого двузначного числа.

543. Квадрат двузначного числа содержит нечетное число десятков. Найти цифру единиц двузначного числа.

544. Четырехзначное число, в котором цифра десятков есть нуль, а цифра единиц равна разности между цифрами тысяч и сотен, есть точный квадрат. Какое это число?

545. Четырехзначное число, в котором цифра сотен есть нуль, а цифра единиц равна сумме цифр тысяч и десятков, есть точный квадрат. Какое это число?

546. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 116?

547. Существуют ли такие два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 125?

548. Дана система:

$$\begin{cases} \dfrac{z}{x+y}=2; \\ \dfrac{z}{y-x}=3, \text{ где } x>0;\ y>0;\ z>0. \end{cases}$$

Что больше: z или x?

549. Дана система:

$$\begin{cases} x+y+z=28; \\ 2x-y=32, \text{ где } x>0;\ y>0;\ z>0. \end{cases}$$

Что больше: x или y?

ГЕОМЕТРИЯ

I. Задачи на вычисление

550. Существует ли такой выпуклый многоугольник, у которого внешние углы пропорциональны числам 3 : 3 : 2 : 2?

551. Существует ли такой выпуклый многоугольник, у которого отношение суммы внутренних углов к сумме внешних равно 15 : 4?

552. В треугольнике ABC проведены BK — биссектриса и BE — высота (K и E лежат на AC). Угол BKE равен 70°. Найти разность между углами C и A.

553. В треугольнике ABC $\angle C - \angle A = 60°$, BD — биссектриса, BE — высота (точки D и E лежат на AC). Найти DE, если $BD = 10$ *см*.

554. Основания трапеции равны 3 *см* и 2 *см*. Диагонали ее равны 4 *см* и 3 *см*. Найти площадь трапеции.

555. Основания трапеции 4 *см* и 9 *см*. Диагонали трапеции 5 *см* и 12 *см*. Найти площадь трапеции.

556. Определить площадь трапеции по двум диагоналям 17 *см* и 113 *см* и высоте 15 *см*.

557. В треугольнике ABC сторону AB разделили на 5 равных частей. Обозначили точки деления, начиная от вершины A, буквами K_1, K_2, K_3, K_4. Через каждую точку деления провели прямые параллельно AC и точки пересечения их со стороной BC обозначили буквами M_1, M_2, M_3, M_4, считая от вершины C. Найти сумму площадей

четырехугольников $K_1K_2M_2M_1$ и $K_3K_4M_4M_3$, если $b = 24$ *см*, $H_b = 25$ *см*.

558. Две окружности внешне касаются в точке C. AB — общая касательная, где A — точка одной окружности, а B — точка другой окружности. Меньший из углов треугольника ABC равен 30°, меньшая сторона — 15 *см*. Найти длину большей стороны треугольника.

559. По углам вписанного в окружность треугольника определить углы треугольника, образованного касательными к этой окружности в вершинах этого треугольника.

560. По углам при основании вписанного в окружность треугольника определить угол между его основанием и касательной к окружности в вершине треугольника.

II. Задачи на построение

561. Построить треугольник, середины сторон которого находились бы в данных точках.

562. Дан треугольник ABC, вершина которого C не помещается на чертеже. Провести медианы из вершин A и B этого треугольника.

563. Вершина C треугольника ABC оказалась вне чертежа. Провести прямую, перпендикулярную AB и проходящую через точку пересечения медиан треугольника. (Точка пересечения медиан не дана.)

564. В треугольнике ABC вершина B недоступна. Построить медиану к стороне AC.

565. На местности отмечены два направления (непараллельные), на которых находятся пункты C и D. Точка пересечения этих направлений недоступна. Из этой точки опустить перпендикуляр на CD.

566. В равносторонний треугольник вписать другой треугольник так, чтобы его вершины лежали на сторонах данного треугольника, а стороны были бы перпендикулярны к сторонам данного. Доказать, что вписанный треугольник равносторонний.

567. В данный треугольник ABC вписать ромб так, чтобы угол ABC был общим углом ромба и треугольника.

568. В квадрат $ABCD$ вписать новый квадрат так, чтобы одна из его вершин находилась в точке M, данной на стороне AB.

569. В треугольнике ABC провести прямую, параллельную AC, так чтобы $AD + EC = DE$, где D и E — точки пересечения искомой прямой с боковыми сторонами треугольника.

570. Построить ромб, чтобы вершины его острых углов находились в данных точках A и B и меньшая диагональ равнялась стороне.

571. Дана окружность и вне ее прямая. На окружности даны две точки A и B. Найти на ней точку C, чтобы прямые AC и BC образовывали бы с данной прямой равные углы.

572. Дана окружность, центр которой недоступен. (Другими словами, центр нельзя использовать при построении.) Построить прямую, касающуюся этой окружности в данной точке.

573. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

574. Построить треугольник по медианам m_a и m_b и высоте H_a.

575. Построить равнобедренный треугольник по высоте и медиане, проведенным к боковой стороне.

576. Построить прямоугольный треугольник по медианам m_a и m_c, если c — гипотенуза.

577. Построить треугольник по трем его медианам.

578. Построить треугольник по двум данным углам при основании и данному его периметру.

579. Построить треугольник по основанию c, медиане m_c, высоте H_c.

580. Построить равнобедренный треугольник по высоте H_b, опущенной на основание, и высоте H_a, опущенной на боковую сторону.

581. Построить треугольник ABC, если известны угол C, высота H_b и периметр его $2p$.

582. Построить треугольник по углу A, высоте H_a и биссектрисе того же угла l_A.

583. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и радиусу вписанного круга.

584. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник по сумме гипотенузы с высотой, опущенной на нее.

585. Построить прямоугольный треугольник по острому углу α и сумме S гипотенузы и катета, прилежащего к углу α.

586. Построить прямоугольный треугольник по острому углу α и сумме S гипотенузы и катета, противолежащего углу α.

587. Построить параллелограмм $ABCD$ по стороне AB, углу A и сумме стороны BC с диагональю AC.

588. Построить прямоугольник по стороне и сумме диагонали с другой стороной.

589. Построить параллелограмм по стороне, сумме диагоналей и углу между ними.

590. Построить параллелограмм по данному его углу и диагоналям (d_1 и d_2).

591. Построить параллелограмм по стороне AB, тупому углу ABC и высоте, проведенной к стороне AB.

592. Между сторонами данного угла поместить отрезок данной длины так, чтобы его концы отсекали на сторонах данного угла равные отрезки.

593. Построить параллелограмм по стороне a, высоте H_a и диагонали d.

594. Построить параллелограмм по основанию, высоте и тупому углу между диагоналями, обращенному к основанию.

595. Построить параллелограмм по данному основанию, диагонали и углу между диагоналями, обращенному к этой стороне.

596. Построить параллелограмм по его высотам (H_1 и H_2) и острому углу.

597. Построить прямоугольник по большей стороне и перпендикуляру, опущенному из середины этой стороны прямоугольника на диагональ.

598. Построить ромб по углу, образованному диагональю со стороной, и сумме (m) его диагоналей.

599. Построить трапецию, если даны: большее основание (a), средняя линия (b), углы α и β при меньшем основании.

600. Построить равнобедренную трапецию по высоте, острому углу и средней линии.

601. Построить трапецию по основаниям, боковой стороне и углу, который образуется продолжениями боковых сторон.

602. Из данного треугольника прямыми, параллельными большей стороне, вырезать трапецию так, чтобы

средняя линия ее равнялась отрезку m, а высота — отрезку h.

603. Построить квадрат по разности (m) между диагональю и стороной.

604. Найти геометрическое место середин хорд, проведенных в окружности через данную внутри нее точку.

605. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки A на прямые, проходящие через точку B.

III. Задачи на доказательство

606. Дан ромб. Построены биссектрисы его внешних углов до взаимного пересечения. Определить вид образовавшегося четырехугольника и доказать, что его периметр в 2 раза больше суммы диагоналей ромба.

607. Доказать, что если биссектрисы углов при основании равностороннего треугольника продолжить до взаимного пересечения и из середины полученных отрезков восставить к ним перпендикуляры, то основание треугольника рассечется на три равные части.

608. В треугольнике ABC сторона BC продолжена за точку C. Проведены биссектрисы углов ACD и ABC. Доказать, что угол E, образовавшийся при пересечении биссектрис, равен $0{,}5\ \angle A$.

609. В $\triangle ABC$ на большей стороне AB отложен отрезок $BD = BC$. Доказать, что CD делит угол C на два угла, из которых один равен полусумме углов BAC и ACB, а другой — их полуразности.

610. Доказать, что сумма расстояний от какой-нибудь точки M, взятой внутри равностороннего треугольника, до его сторон постоянна и равна высоте треугольника.

611. На продолжении основания равнобедренного треугольника взята точка. Доказать, что разность расстояний этой точки до боковых сторон равна высоте треугольника, опущенной на боковую сторону.

612. Дан треугольник ABC, в котором $AC = 0{,}5(AB + BC)$. Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и точку пересечения биссектрис, параллельна AC.

613. В равнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса CD угла C, затем из точки D, лежащей на AB, проведен отрезок DE, параллельный AC до

пересечения с BC в точке E. Из точки D проведен еще перпендикуляр DF к CD (F лежит на AC). Доказать, что DM равен 0,25 CF, если M — пересечение DE с высотой треугольника.

614. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O. Через точку O проходят две прямые, которые параллельны прямым AB и AC и пересекаются с BC в точках D и E. Доказать, что периметр треугольника OED равен отрезку BC.

615. Из вершины треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C. Доказать, что отрезок MP равен половине периметра треугольника ABC.

616. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина BC, а N — середина CD. Доказать, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

617. Доказать, что биссектрисы внешних углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник, диагональ которого равна сумме двух соседних сторон параллелограмма.

618. Доказать, что биссектрисы внутренних углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник, диагональ которого равна разности двух соседних сторон параллелограмма.

619. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Доказать, что точки пересечения биссектрис каждого из треугольников ABO, BCO, CDO, DAO служат вершинами ромба.

620. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Доказать, что точки пересечения биссектрис каждого из треугольников ABO, BCO, CDO, DAO служат вершинами квадрата.

621. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что центры построенных квадратов являются вершинами нового квадрата.

622. Дан ромб $ABCD$ с острым углом в 60°. Прямая MN отсекает от сторон AB и BC отрезки MB и NB, сумма которых равна стороне ромба. Доказать, что $\triangle MDN$ равносторонний.

623. Вершины ромба $ABCD$ соединены с серединами сторон: A — с серединой стороны BC, B — с серединой стороны DC, C — с серединой стороны DA, D — с серединой стороны AB. Доказать, что образованный пересече-

нием проведенных отрезков четырехугольник — параллелограмм.

624. Дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90°$, на его катетах построены квадраты $ADKC$ и $CBHE$. Доказать, что сумма расстояний точек D и H от прямой AB равна длине гипотенузы AB.

625. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ (AD — большее основание), диагонали которой AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O. Через вершину B проведена прямая, параллельная диагонали AC, а из вершины C опущен на эту прямую перпендикуляр CE. Определить вид четырехугольника $OBEC$.

626. Доказать, что в четырехугольнике середины диагоналей и точка пересечения прямых, соединяющих середины противолежащих сторон, лежат на одной прямой.

627. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружности в точке C и D, и через точку B — прямая, пересекающая окружности в точках E и F (точки C и E — на одной окружности, D и F — на другой). Доказать, что $\angle CBD = \angle EAF$.

628. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC. Точка M — произвольная точка этой окружности, находящаяся от BC по другую сторону, чем точка A. Доказать, что $BM + MC = AM$.

629. Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в окружность, квадрат имеет наибольший периметр.

630. Доказать, что из всех треугольников, имеющих данное основание и равные углы при вершине, равнобедренный имеет наибольший периметр.

631. Треугольник ABC равносторонний: A_1 — середина стороны BC; B_1 — середина стороны AC; C_1 — середина стороны AB. Доказать, что A_1C_1 касается окружности, проходящей через A_1B_1C.

632. Через точку K, лежащую на окружности O, проведена хорда KA (дуга KA больше 90°) и касательная MKP. Прямая, проведенная через центр O перпендикулярно радиусу OA, пересекает хорду AK в точке B и касательную MP в точке C. Доказать, что отрезок KC равен отрезку BC.

633. В данный круг вписан прямоугольник. Середины сторон последовательно соединены отрезками. Доказать,

что периметр образовавшегося четырехугольника равен удвоенному диаметру данного круга.

634. В квадрате $ABCD$ из точки D как из центра проведена внутри квадрата дуга через вершины A и C. На AD как на диаметре построена внутри квадрата полуокружность. Отрезок прямой, соединяющей произвольную точку P дуги AC с точкой D пересекает полуокружность AD в точке K. Доказать, что длина отрезка PK равна расстоянию от точки P до стороны AB.

635. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около равных треугольников, равны.

636. Доказать, что если через точку касания двух окружностей проведена внутри их какая-либо секущая, то касательные, проведенные через концы этой секущей, параллельны.

637. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены прямые, пересекающие одну окружность в точках C_1, C_2, C_3, ... и другую в точках D_1, D_2, D_3, ... В точках C и D строятся касательные к окружностям. Доказать, что эти касательные пересекаются под одним и тем же углом.

638. Две окружности внешне касаются, к ним проведена общая внешняя касательная. На отрезке касательной, заключенной между точками касания, как на диаметре построена окружность. Доказать, что она касается линии центров первых двух окружностей.

VIII

КЛАСС

АЛГЕБРА

I. Задачи на составление уравнений

639. Поезд вышел со станции A по направлению к станции B в 13 *ч*. В 19 *ч* ему пришлось остановиться из-за снежного заноса. Через 2 *ч* путь удалось расчистить, и, чтобы нагнать опоздание, машинист повел поезд со скоростью, превышающей первую скорость на 20%. В результате поезд пришел в B с опозданием на 1 *ч*. На следующий день поезд, шедший по тому же расписанию (из A в B), попал в занос на 150 *км* дальше от A, чем первый поезд. Простояв 2 *ч*, он тоже пошел со скоростью на 20% большей, чем скорость до остановки, но нагнал лишь 0,5 *ч*. Каково расстояние от A до B?

640. Два поезда отправляются одновременно из A в B навстречу друг другу. Скорость первого поезда на 10 *км/ч* больше скорости второго поезда. Поезда встречаются на расстоянии 28 *км* от середины AB. Если бы первый поезд отправился из A на 45 *мин* позже второго, то поезда встретились бы на середине AB. Найти расстояние AB и скорость обоих поездов.

641. Два рабочих должны были по плану работать одинаковое число дней. Если бы первый работал на один день меньше, а второй на 7 дней меньше плана, то первый заработал бы 36 руб., а второй — 32,4 руб. Если бы, наоборот, первый работал на 7 дней меньше, а второй на 1 день меньше своего плана, то второй заработал бы на 16,2 руб. больше первого. Сколько заработал каждый в действительности?

642. Бассейн наполняется водой двумя кранами. Сначала первый кран был открыт одну треть того времени, какое нужно было бы, чтобы наполнить бассейн, открыв только второй кран. Затем, наоборот, второй кран был открыт одну треть того времени, которое требуется для наполнения бассейна одним первым краном. После этого

оказалось наполненным $\frac{13}{18}$ бассейна. Вычислить, сколько времени нужно для наполнения бассейна каждым краном в отдельности, если оба крана, открытые вместе, наполняют бассейн за 3 *ч* 36 *мин*.

643. Три парохода совершают рейс между пристанями A и B. Первый пароход проходит в час на 3 *км* больше, чем второй, а весь рейс совершает на 2 *ч* быстрее второго. Второй пароход проходит в час на 3 *км* больше, чем третий, а весь рейс совершает на 3 *ч* быстрее третьего. Определить скорость третьего парохода и расстояние между A и B.

644. Две машины выехали одновременно из одного пункта и едут в одном направлении. Одна машина идет со скоростью 50 *км/ч*, другая — 40 *км/ч*. Спустя полчаса из этого же пункта и в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую на полтора часа позже, чем вторую. Определить скорость третьей машины.

645. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу — первый из A, второй из B и встретились через 3 *ч*. За сколько времени прошел расстояние AB каждый из них, если первый пришел в B на $2\frac{1}{2}$ *ч* позже, чем второй пришел в A?

646. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из A и B: первый пошел из A в B, а второй — из B в A. Каждый идет с постоянной скоростью без остановок и, придя в свой конечный пункт, немедленно поворачивает обратно. Когда они встретились во второй раз, то оказалось, что первый пешеход прошел на 4 *км* больше, чем второй. Продолжая идти дальше, первый пешеход прибыл в A через 1 *ч* после второй встречи, а второй в B — через 2,5 *ч* после этой встречи. Определить скорость первого.

647. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 60 *км*, должны были выйти одновременно навстречу друг другу два пешехода. Однако второй задержался в B и потому вышел с опозданием. Пешеходы встретились в 20 *км* от B и после встречи продолжали идти каждый в свою сторону. Первый пришел в B раньше, чем второй дошел до A, причем время между прибытием первого в B и второго в A в два раза меньше того вре-

мени, на которое второй задержался в *В* перед началом пути. На другой день они вышли навстречу друг другу одновременно и встретились через 6 *ч* 40 *мин*. Определить скорость первого пешехода.

648. Турист прошел весь путь от *А* до *Б* и обратно за 3 *ч* 41 *мин*. Дорога из *А* и *Б* идет сначала в гору, потом по ровному месту, затем под гору. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту, если скорость ходьбы туриста в гору 4 *км/ч*, по ровному месту — 5 *км/ч*, под гору — 6 *км/ч*. Расстояние от *А* до *Б* равно 9 *км*.

649. Катер вышел из пункта *А* одновременно с плотом, плывшим по течению реки, и прошел по течению реки $13\frac{1}{3}$ *км*, а затем, не останавливаясь, — $9\frac{1}{3}$ *км* в обратном направлении, где и встретился с плотом. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 4 *км/ч*.

650. Велосипедист отправился из города *А* в город *В*, отстоящий от *А* на 60 *км*; затем он выезжает обратно с той же скоростью. Сделав через час после выезда 20-минутную остановку, он продолжает путь, увеличив скорость на 4 *км/ч*. Какова была первоначальная скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь от *В* до *А* он употребил столько же времени, сколько и на путь от *А* до *В*?

651. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля в 5% и 40%. Сколько надо взять лома каждого из этих сортов, чтобы получить 140 *кг* стали с содержанием никеля в 30%?

652. По окружности длиной 60 *м* равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна делает полный круг на 5 *сек* скорее, чем другая, при этом они встречаются каждую минуту только один раз. Найти скорость каждой точки.

653. По окружности длиной 3,6 *м* равномерно и в одном направлении движутся две точки, которые сходятся через каждые 12 *сек*. Найти скорость каждой точки, зная, что одна из них пробегает всю окружность на 2 *сек* быстрее другой.

654. Два велосипедиста выехали одновременно из одного и того же пункта по кольцевому треку в противоположных направлениях, и через две минуты

встретились. От пункта встречи они поехали в одном направлении, и через три минуты один догнал другого. За какое время каждый велосипедист проходит всю окружность трека?

655. Два велосипедиста одновременно выехали из одного пункта и поехали по кольцевому треку в противоположном направлении и через одну минуту встретились. От пункта встречи они поехали в одном направлении, причем один уменьшил свою скорость в 2 раза. За какое время каждый велосипедист проходит всю окружность трека, если вторая встреча произошла через две минуты после первой?

656. Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 2 *сек* быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 *сек*. За какое время каждое тело проходит окружность?

657. Два поезда выехали одновременно навстречу друг другу из городов A и B и встретились через 6 *ч*. Первому поезду, чтобы пройти 0,4 пути от A до B, надо на 2 *ч* больше, чем второму для прохождения $\frac{2}{15}$ пути от B до A. За сколько часов каждый поезд проходит весь путь от A до B?

658. Велосипедист проехал 96 *км* на 2 *ч* быстрее, чем предполагал. При этом за каждый час он проезжал на 1 *км* больше, чем предполагал проезжать за 1 *ч* 15 *мин*. С какой скоростью он ехал?

659. Два мальчика стартовали по беговой дорожке длиной 50 *м* с интервалом в одну секунду. Мальчик, стартовавший вторым, догнал первого в десяти метрах от линии старта, добежал до линии финиша и с той же скоростью побежал обратно. На каком расстоянии от линии финиша он встретил первого мальчика на своем обратном пути, если известно, что эта встреча произошла через 10 *сек* после старта первого мальчика?

660. Из пункта A в пункт B против течения реки выехала моторная лодка. В пути сломался мотор, и пока его чинили 20 *мин*, лодку сносило вниз по реке. Определить, на сколько позднее прибыла лодка в пункт B из-за поломки мотора, если известно, что обычно путь из A в B лодка проходит в полтора раза дольше, чем путь из B в A.

661. Расстояние от A до B — 100 *км*. Из A вышли одновременно две машины. Скорость первой машины больше скорости второй на 10 *км/ч*. Первая машина останавливалась в пути на 50 *мин*. Какова скорость первой машины, если она пришла в B не позже, чем вторая машина.

662. Двое рабочих грузили на машины дрова. Они начали работать одновременно, и до перерыва второй нагрузил дровами 8 машин. После перерыва они работали еще два часа, и за это время второй нагрузил на 2 машины больше, чем первый нагружал в час, а первый на 12 машин меньше того, что оба вместе нагрузили до перерыва. Сколько всего машин нагрузили оба рабочих за все время работы?

663. Двое рабочих получили одинаковое задание: изготовить определенное число деталей за определенный срок. Первый выполнил задание в срок, а второй выполнил в срок только 90% задания, не додав столько деталей, сколько первый делал за 40 *мин*. Если бы второй рабочий делал в час на три детали больше, он выполнил бы задание на 95%. Сколько деталей должен был изготовить каждый рабочий?

664. Три бригады, работая одновременно, выполняют норму по изготовлению деталей за несколько часов. Если бы первые две бригады работали в 2 раза медленнее, а третья бригада — в 4 раза быстрее, то норма была бы выполнена за то же время. Известно, что первая и вторая бригады при совместной работе выполняют эту норму в 2 раза быстрее, чем вторая с третьей. Во сколько раз первая бригада делает в час деталей больше, чем третья?

665. Поле площадью 980 *га* обработано тремя бригадами, работавшими последовательно одна за другой, причем каждая из них затратила на работу разное число дней. Первая бригада обработала 70 *га*, вторая — 280 *га*, а третья — остальную часть поля. Если бы первая бригада работала столько дней, сколько затратила на работу вторая, а вторая — сколько затратила первая, то они обработали бы одинаковую площадь. Если же вторая бригада работала бы столько дней, сколько затратила третья, а третья — сколько затратила вторая, то они также обработали бы одинаковую площадь. Сколько

дней работала каждая бригада, если известно, что три бригады, работая одновременно, могут обработать все поле за 14 дней?

II. Теорема Виета

666. Пусть α и β — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ и пусть имеет место соотношение

$$(\alpha^2 + \beta)(\beta^2 + \alpha) = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2\beta^2.$$

Доказать, что между коэффициентами p и q существует зависимость:

$$p^3 + p^2 - 3pq - 3q = 0.$$

667. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ и имеет место соотношение:

$$(x_1^2 - x_2)(x_1 - x_2^2) + x_1^2x_2^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Доказать, что между коэффициентами p и q существует зависимость:

$$p^3 + p^2 - 3pq - q = 0.$$

668. При каком значении a сумма кубов корней уравнения $(2a + 1)x^2 + (2a + 1)x + 2a^2 = 0$ равна 3?

669. При каком значении b сумма кубов корней квадратного уравнения $(3b - 1)x^2 + (3b - 1)x + b^2 = 0$ равна -1?

670. В уравнении $(a^2 - 5a + 3)x^2 + (3a - 1)x + 2 = 0$ определить a, если известно, что отношение корней равно 2.

671. В данном уравнении $4x^2 - 15x + 4m^2 = 0$, найти m так, чтобы один корень был квадратом другого.

672. Найти сумму квадратов корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, не находя его корней.

673. Найти сумму кубов корней данного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

674. Не решая уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, найти $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.

675. В уравнении $x^2 + kx + 7 = 0$ найти k, если $x_1 - x_2 = 1$.

676. Не решая уравнения $3x^2 - 5x - 4 = 0$, вычислить $x_1^3x_2 + x_1x_2^3$, где x_1 и x_2 корни его.

III. Радикалы

Упростить:

677. $\sqrt{a^2+6a+9}+\sqrt{a^2-6a+9}$.

678. $\dfrac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^2+1}}$, $a\neq 0$.

679. $\dfrac{a-b}{\sqrt{a^3-2a^2b+ab^2}}$; $a>0$ и $a\neq b$.

680. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, если $1\leqslant x\leqslant 2$.

681. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$, если $x=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$; $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

682. $\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2}$.

683. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times$
$\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

684. Упростить следующее выражение:

$$y=\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}},$$

где $1\leqslant x<2$.

Решить уравнения:

685. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}=-7$.

686. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}=2$.

687. $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+1+2x}=\sqrt{4+4x+x^2}$.

688. $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-2x+1}$.

689. $x^2+4x-16\sqrt{2x}+20=0$.

690. $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}$.

691. $\sqrt{x+5}+\sqrt{2-x}=x^2-25$.

692. Решить неравенство:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}\geqslant\sqrt{5-x}.$$

693. Доказать, что

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

694. Упростить:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}.$$

695. Выделив полный квадрат из подкоренного выражения, извлечь корень:

а) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$; б) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$; в) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$;

г) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}$; д) $\sqrt{n-2\sqrt{n-1}}$;

е) $\sqrt{a-x-2\sqrt{a-x-1}}$.

696. Решить уравнения: а) $x^2+\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; б) $x^2+\sqrt{2}-2=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

697. Упростить:

$$\frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

В задачах № 698—700 следует использовать формулу сложного радикала, которую надо вывести на занятиях математического кружка:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Формула верна при $A\geqslant\sqrt{B}$. Применение указанной формулы дает сумму „простых“ радикалов только в том случае, когда A^2-B — точный квадрат.

Вычислить:

698. $\dfrac{1}{1+\sqrt{7-\sqrt{24}}}-\dfrac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}$.

699. $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

700. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

701. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}.$$

IV. Уравнения и системы уравнений

702. $x^2-2x+y^2-4y+5=0$.

703. Найти значения x, y и z, для которых выполняется равенство:

$$4x^2+9y^2+16z^2-4x-6y-8z+3=0.$$

704. $x^4-5x^3+10x^2-10x+4=0$.

705. $4\sqrt{2}\,x^3-22x^2+17\sqrt{2}\,x-6=0$.

706. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$.

707. $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$.

708. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$.

709. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3x}-\sqrt{6}}{\sqrt{2x+6}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$.

710. $\dfrac{a}{1-bx}=\dfrac{b}{1-ax}$.

711. $\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{2a}{x+a}=\dfrac{8a^2}{x^2-a^2}$.

712. При каких значениях a выражение $(x-1)(x-2)$ будет равняться $(a-1)(a-2)$?

713. Найти все действительные x, y и z, удовлетворяющие системе: $\begin{cases}x+y+z=3;\\2xy-2y-z^2=4.\end{cases}$

714. $\begin{cases}(x-1)(2x+y)=0;\\(y+1)(2y-x)=0.\end{cases}$

715. $\begin{cases}x(x-2y)(x-1)=0;\\\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

716. $\begin{cases}x^3-y^3=19(x-y);\\x^3+y^3=7(x+y).\end{cases}$

717. $\begin{cases}(x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=1480;\\(x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=520.\end{cases}$

718. Найти целые решения:

$$\begin{cases} 5(x^4+y^4)=17(x^2+y^2); \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

719. $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5; \\ |x+1|=4y-4. \end{cases}$

720. $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x}{x+y}}-2+\sqrt{\frac{x+y}{3x}}=0; \\ xy-54=x+y. \end{cases}$

721. $\begin{cases} \frac{xyz}{x+y}=2; \\ \frac{xyz}{y+z}=1{,}2; \\ \frac{xyz}{x+z}=1{,}5. \end{cases}$

722. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4; \\ x+xy+y=2. \end{cases}$ **723.** $\begin{cases} x^2+xy+x=10; \\ y^2+xy+y=20. \end{cases}$

724. $\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=336; \\ y^2+x\sqrt{xy}=112. \end{cases}$

725. Найти целые положительные решения системы:

$$\begin{cases} x^2+5y^2+4z^2+4xy+4yz=125; \\ x^2+3y^2-4z^2+4xy-4yz=\ 75. \end{cases}$$

В области действительных чисел найти корни:

726. $\begin{cases} x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=341; \\ x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=330. \end{cases}$

727. $\begin{cases} 3x+xy-y^2-3y=0; \\ x^2-5x+2y^2-12=0. \end{cases}$

728. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6; \\ x_2+x_3+x_4=9; \\ x_3+x_4+x_5=3; \\ x_4+x_5+x_6=-3; \\ x_5+x_6+x_7=-9; \\ x_6+x_7+x_8=-6; \\ x_7+x_8+x_1=-2; \\ x_8+x_1+x_2=2. \end{cases}$ **729.** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=10; \\ x_2+x_3+x_4+x_5=9; \\ x_3+x_4+x_5+x_1=8; \\ x_4+x_5+x_1+x_2=7; \\ x_5+x_1+x_2+x_3=6. \end{cases}$

V. Графики

Построить графики:

730. $y=|x+3|$.

731. $y=\frac{1}{x-2}$.

732. $y=\frac{1}{|x-2|}$.

733. $y=|x^2-4|$.

734. $y=|4-x^2|+2$.

735. $y=|x^2-3x-18|$.

736. $y=5x^2+14|x|-3$.

737. $y=4x^2-8|x|-5$.

738. $y=|x|-x$.

739. $y=x+\frac{1}{x}$.

740. $y=\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}$

741. $y=|x-2|+|x-3|$.

742. $y=|1-x|-|x-2|-|x-3|$.

743. $y=(x+1)(|x|-1)$.

744. $y=|x-1|(|x|-1)$.

745. $y=|x-1|\cdot|x+2|$.

746. $y=\frac{|x-2|}{x-2}+2x$.

747. $y=\frac{x^3}{|x^3|}-x^2$.

748. $y=\begin{cases}-2x^2, & \text{если } |x|<1;\\ 0, & \text{если } |x|=1;\\ |x|, & \text{если } |x|>1.\end{cases}$

749. $y=\begin{cases}0{,}5x-1, & \text{если } x>3;\\ 0, & \text{если } |x|<3;\\ -(x+3)^2, & \text{если } x\leqslant -3.\end{cases}$

750. Решить уравнение

$$\frac{x^2}{4}+1-\frac{4}{x}=0.$$

VI. Разное

Разложить на множители:

751. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.

752. $a^3+b^3+c^3-3abc$.

753. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

754. Доказать тождество:

$$a^3+b^3+c^3=3abc, \text{ если } a+b+c=0.$$

755. Доказать тождество:

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=$$
$$=(x+6)(x+2)(x^2+8x+10).$$

756. Доказать, что сумма трех последовательных степеней числа 2 делится на 7.

757. Доказать, что при всяком нечетном x выражение x^3+3x^2-x-3 делится на 48.

758. Доказать, что при всяком нечетном n выражение $n^{12}-n^8-n^4+1$ делится на 512.

759. Доказать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9.

760. Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является квадратом целого числа.

761. Доказать, что если два числа при делении на третье число дают одинаковые остатки, то их разность делится на это третье число.

762. Доказать, что полусумма квадратов двух четных чисел равна сумме квадратов двух целых чисел.

763. Доказать, что если нечетное число есть сумма квадратов двух разных чисел, то и половина его есть также сумма квадратов.

764. Упростить:

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac}.$$

765. Решить уравнение:

$$(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680.$$

766. Доказать, что $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1{,}001>0$ при любых значениях x.

767. Решить уравнение в целых положительных числах:

$$x^2-y^2=105.$$

768. В уравнении $x^2+(2-a)x-a-3=0$ найти a так, чтобы сумма квадратов его корней была бы наименьшей.

769. В уравнении $x^2-ax+a-1=0$, где a — действительное число, найти a, при котором $x_1^2+x_2^2$ принимает наименьшее значение.

770. Найти наименьшее значение выражения $\frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$.

771. В нашем распоряжении имеется изгородь длиной в 200 *м*. Требуется огородить этой изгородью участок земли в виде прямоугольника наибольшей площади. Найти отношение сторон этого прямоугольника и площадь его.

772. В квадрат со стороной a вписать квадрат, имеющий наименьшую площадь. Чему равна его сторона?

773. $a+\frac{1}{a}$ — целое число (a не целое). Доказать, что $a^3+\frac{1}{a^3}$ тоже целое.

774. Дано $y=\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^2-\frac{1}{x^2}}$ и $z=\frac{x^4+\frac{1}{x^4}}{x^4-\frac{1}{x^4}}$.

Найти выражение для z через y.

775. Доказать, что если $y=\frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{x^n-\frac{1}{x^n}}$, то $\frac{x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}}{x^{2n}-\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{y^2+1}{2y}$, каково бы ни было n.

776. Доказать, что уравнение $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ имеет действительные корни.

777. Показать, что уравнение $(a^2+b^2+c^2)x^2+2(a+b+c)x+3=0$ не может иметь действительных корней, если из чисел a, b и c по крайней мере никакие два не равны между собой.

778. Найти все пары значений x и y, при которых выполняется равенство: $\sqrt{x^2-y^2}=x-(\sqrt{y})^2$.

779. Найти все пары значений x и y, при которых выполняется равенство: $\sqrt{x^2+y^2}=(\sqrt{x})^2-y$.

780. Известно, что $b=\frac{2ac}{a+c}$; $x=\frac{a}{b+c}$; $y=\frac{b}{a+c}$; $z=\frac{c}{a+b}$. Доказать, что $y=\frac{2xz}{x+z}$.

781. Вычислить: $\frac{8a^7}{a^8+b^8}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$.

782. Найти A и B, если известно соотношение:

$$\frac{3x+3}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}.$$

ГЕОМЕТРИЯ

I. Замечательные точки и линии в треугольниках

783. Если две биссектрисы углов треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

784. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

785. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты: $BCKL$ и $BAED$. Доказать, что отрезок DL, соединяющий вершины квадратов, в два раза больше медианы треугольника ABC, проведенной из вершины B.

786. На двух сторонах AB и BC треугольника ABC построены квадраты $BCEF$ и $BALD$ и вершины квадратов D и F соединены между собой. Доказать, что продолжение высоты BN треугольника ABC делит отрезок DF пополам.

787. Построить треугольник, зная точки, в которых продолжения высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из одной вершины треугольника, пересекают описанную около него окружность.

788. Построить треугольник, зная точки, в которых продолжения его высот пересекают описанную около него окружность.

789. Построить треугольник ABC, зная три точки, в которых продолжения его биссектрис пересекают описанную около него окружность.

790. Из точки, лежащей вне данного круга, опустить перпендикуляр на данный диаметр или его продолжение. (Задачу решить только с помощью линейки.)

791. На отрезке AC взята точка B и на AB и BC построены по одну сторону от AC равносторонние треугольники ABD и BCD_1. Затем точка C соединена с D и A с D_1. Середины отрезков CD и AD_1 — M и N — соединены с B. Доказать, что $\triangle MBN$ равносторонний.

792. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса острого угла B, которая пересекла катет AC в точке L; на отрезках CL и LA как на

сторонах построены два квадрата. Доказать, что площадь одного квадрата в два раза больше площади другого.

793. Вершина A квадрата $ABCD$ соединена с точкой O — серединой BC, вершина B — с точкой E — серединой CD, вершина C — с точкой N — серединой AD и вершина D — с точкой K — серединой AB. Точки пересечения проведенных прямых L, M, R и P служат вершинами четырехугольника $LMRP$. Доказать, что его площадь равна пятой части площади квадрата $ABCD$.

794. Треугольник ABC — равносторонний. $AM = BK = CL = \frac{AC}{3}$. ($M$ лежит на AC, K на AB, L на BC.) Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника DEF, полученного при пересечении AL, BM и CK?

795. В четырехугольнике $ABCD$ точка E, середина AB, соединена с вершиной D, а F, середина CD, — с вершиной B. Доказать, что площадь четырехугольника $EBFD$ в два раза меньше площади четырехугольника $ABCD$.

796. Доказать, что для всякой точки внутри треугольника справедливо равенство $h_a \cdot a + h_b \cdot b + h_c \cdot c = 2S_{ABC}$, где h — расстояние этой точки до соответствующей стороны.

797. Точка, лежащая внутри параллелограмма, соединена со всеми его вершинами. Доказать, что суммы площадей противолежащих треугольников, на которые разбивается параллелограмм, равны между собой.

798. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. На продолжении стороны AB откладывается отрезок $BM = AB$; на продолжении стороны BC — отрезок $CN = BC$, на продолжении стороны CD — отрезок $DP = CD$ и на продолжении стороны DA — отрезок $AQ = AD$. Доказать, что площадь четырехугольника $MNPQ$ в пять раз больше площади четырехугольника $ABCD$.

799. Через произвольную точку, взятую внутри треугольника, проведены отрезки прямых, параллельных сторонам данного треугольника. При этом треугольник разбивается на три параллелограмма и три треугольника. Доказать, что произведение площадей параллелограммов в восемь раз больше произведения площадей треугольников.

800. Через точку M, лежащую внутри угла, проведена прямая, отсекающая от этого угла наименьший по площади треугольник. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла, делится в точке M пополам.

801. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, вдвое больше площади последнего. Определить углы прямоугольного треугольника.

802. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel CB$) диагональ BD перпендикулярна AD; O — точка пересечения диагоналей. $\angle CAD = \angle CAB$. Определить стороны этой трапеции, если $OD = 1$ *дм*, $BO = 2$ *дм*.

803. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки m и n. Доказать, что площадь треугольника равна mn.

804. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 *см* и 12 *см*. Найти катеты этого треугольника.

805. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c, если известно, что медиана, проведенная к гипотенузе, есть среднее геометрическое его катетов.

806. Найти отношение радиусов вписанного и описанного кругов для равнобедренного треугольника с углом α при основании.

II. Подобие треугольников

807. Одна из диагоналей четырехугольника, вписанного в окружность, является диаметром окружности. Доказать, что проекции противоположных сторон четырехугольника на вторую диагональ равны между собой.

808. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, в которой $\angle C = \angle B = 90°$. На AD как на диаметре построена окружность, которая пересекает BC в точках M и N. Доказать, что $BM \cdot MC = AB \cdot CD$.

809. Две окружности касаются внешним образом в точке A; BC — их общая внешняя касательная, пересекающая линию центров в точке K. Через K проведена прямая MN, перпендикулярная к BC. Прямые AB и AC пересекают MN в точках P и E. Доказать, что $KP = KE$.

810. Трапеция разбивается диагоналями на 4 треугольника. Определить площадь трапеции, если площа-

ди треугольников, прилежащих к основаниям трапеции, равны S_1 и S_2.

811. Определить отношение площади трапеции $ABCD$ к площади $\triangle AOD$, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, если основание $AD = a$, $BC = b$.

812. Найти расстояния от точки пересечения медиан треугольника ABC до сторон $BC = a$ и $AC = b$, если известно, что сумма этих расстояний равна k.

813. Доказать, что если из концов какого-нибудь отрезка AB провести два параллельных между собой отрезка $AA_1 = a$ и $BB_1 = b$ и через точку C_1 — пересечения BA_1 и AB_1 провести $C_1C \parallel BB_1$, то $\frac{1}{CC_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. (Этим свойством удобно пользоваться для графического решения некоторых задач на совместную работу, для нахождения общего сопротивления на участке, состоящем из двух или нескольких параллельных соединений, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ и т. п.)

814. Через точку пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ проведена прямая параллельно основаниям BC и AD до пересечения с боковыми сторонами в точках E и F. Доказать, что EF — среднее гармоническое[1] оснований, т. е.

$$EF = \frac{2}{\frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}}.$$

815. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении 1 : 3. В каком отношении делит ее высота?

816. Доказать, что в любой трапеции точка пересечения продолжений боковых сторон, точка пересечения диагоналей и середины ее оснований лежат на одной прямой.

817. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ дано, что площадь треугольника ODC (O — точка пересечения диагоналей) есть среднее пропорциональное между площадями треугольников BOC и AOD. Доказать, что $ABCD$ — трапеция.

---

[1] Средним гармоническим двух чисел a и b называется число $g = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

818. В треугольнике ABC проведены высоты AD и BE. Доказать, что $\triangle ABC$ подобен $\triangle DEC$.

819. В правильном треугольнике ABC со стороной, равной 3, через точку A и середину высоты BD проведена прямая до пересечения с BC в точке F. Найти длину AF.

820. В треугольнике ABC точка M — середина BC. Биссектриса угла AMB пересекает сторону AB в точке E, а биссектриса угла AMC пересекает сторону AC в точке D.

а) Доказать, что треугольник AED подобен треугольнику ABC.

б) Найти $ME^2 + MD^2$, если $MC = 8$ *см*, а $DC : AD = 3 : 5$.

821. Три окружности касаются попарно внешним образом. Две окружности имеют радиусы, равные 3, а одна 1. Найти площадь треугольника ABC, если A, B и C — точки касания.

822. В окружность, радиус которой равен R, вписан равнобедренный треугольник, боковая сторона которого в два раза больше основания. В этот треугольник вписана окружность. Найти радиус этой окружности.

823. Две окружности радиусов 1 *см* и 3 *см* касаются внешним образом. Найти расстояние от точки касания окружностей до их общей касательной.

824. Боковая высота равнобедренного треугольника делит его площадь в отношении 1 к 3. Определить меньшую из площадей, если основание треугольника 48.

III. Метрические соотношения в треугольнике и круге

825. Доказать, что если в треугольнике высота есть средняя пропорциональная между отрезками, на которые делится соответствующая ей сторона основанием высоты, а углы, прилежащие к этой стороне, острые, то треугольник прямоугольный.

826. Через произвольную точку общей хорды двух пересекающихся окружностей проведено в этих окружностях по хорде. Доказать, что концы двух последних хорд лежат на одной окружности.

827. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом в точке K, а их общая внешняя касательная касается окружностей в точках A и B. Определить стороны треугольника ABK.

IV. Разные задачи

828. На сторонах равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами b построены квадраты, их центры соединены. Найти площадь полученного треугольника.

829. Доказать справедливость формулы:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r},$$

где r — радиус круга, вписанного в данный треугольник, а h_a, h_b, h_c — его высоты.

830. В данный прямоугольный треугольник вписать прямоугольник, диагональ которого была бы наименьшей (одна из вершин прямоугольника совпадает с вершиной прямого угла данного треугольника).

831. Перпендикуляры, опущенные из двух вершин прямоугольника на его диагональ, разделили ее на три равные части. Одна сторона прямоугольника равна $\sqrt{2}$. Найти другую сторону.

832. Основание AD прямоугольника $ABCD$ в 3 раза больше его боковой стороны. Точки E и F делят AD на три равные части. Доказать, что $\angle BEA + \angle BFA + \angle BDA = 90°$.

833. В правильном многоугольнике сумма перпендикуляров, проведенных из точки, взятой внутри него, на стороны многоугольника, равна его апофеме, умноженной на число сторон. Доказать.

834. На сторонах прямоугольного треугольника построены подобные многоугольники, причем стороны треугольника являются сходственными сторонами этих многоугольников. Доказать, что площадь многоугольника, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей, построенных на катетах.

835. Стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника равны между собой. Определить отношение площадей этих многоугольников.

836. Найти отношение площади правильного шестиугольника, вписанного в круг, к площади правильного шестиугольника, описанного около этого круга.

837. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна Q. Острый угол трапеции равен 30°. Найти боковую сторону.

838. В прямоугольном треугольнике с углом в 30°, проведена биссектриса этого угла, которая пересекает катет BC в точке D. На отрезках BD и CD построены подобные многоугольники, в которых BD и CD являются сходственными сторонами. Найти отношение площадей построенных многоугольников.

839. Основания трапеции a и b. В трапеции проведен отрезок, параллельный основаниям и делящий площадь трапеции на равные части. Найти длину этого отрезка.

840. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на 4 треугольника, площади которых выражаются целыми числами. Доказать, что произведение этих четырех чисел является квадратом целого числа.

841. Равнобедренная трапеция с углом при основании 60° имеет боковую сторону, равную 2 *см*. Найти ее площадь, если в нее можно вписать две касающиеся друг друга окружности, каждая из которых касается оснований трапеций и одной из ее боковых сторон.

842. В равнобедренную трапецию, меньшее основание которой равно единице, вписана окружность радиуса единицы. Найти площадь трапеции.

843. В параллелограмме со сторонами a и b и углом между ними α проведены биссектрисы углов. Найти площадь четырехугольника, полученного пересечением этих биссектрис.

844. Найти третью сторону треугольника, если даны две стороны a и b и известно, что медианы, проведенные к этим сторонам, пересекаются под прямым углом.

845. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, в 1,5 раза меньше радиуса описанной окружности около этого треугольника. Найти отношение основания к боковой стороне.

846. Точка C лежит внутри угла в 60°. Ее расстояния от сторон угла a и b. Каково расстояние от вершины угла до точки C?

847. Дан прямоугольный треугольник ABC, катеты которого $AC = 3$, $BC = 5$. На биссектрисе прямого угла ACB берется точка M. Зная, что угол MAC равен α, найти угол MBC.

848. На отрезке AB, равном a, точка C — середина; на AC и на BC как на диаметрах по одну сторону от AB

построены полуокружности. С центрами в точках A и B радиусами, равными AB, проведены дуги до их взаимного пересечения в точке E, находящейся по ту же сторону от AB, что и полуокружности. Проведена окружность, которая касается построенных дуг и полуокружностей. Найти расстояние от центра этой окружности до AB.

849. На отрезке AB как на диаметре построен полукруг. На отрезках AO и BO (радиусах данного полукруга) по одну сторону от AB построены два полукруга. Найти радиус круга, касающегося всех трех построенных полукругов, если $AB = 4a$.

850. Вписать в данную окружность трапецию по ее высоте и боковой стороне.

851. Даны две окружности радиусов r_1 и r_2 и точка M на одной из них. Построить третью окружность, касательную к данным, причем одной из них в данной точке M.

852. Построить треугольник по высоте H_b и двум медианам m_a и m_c, проведенным из других вершин.

853. Построить треугольник по двум сторонам и биссектрисе угла, заключенного между ними.

854. В правильный треугольник, сторона которого a, вписаны три равных круга, касающихся друг друга. Каждый из них касается двух сторон данного треугольника. Определить радиусы этих кругов.

855. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 15°. Доказать, что произведение катетов равно квадрату половины гипотенузы.

856. Доказать, что во всяком четырехугольнике, вписанном в круг, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон. (Теорема Птолемея.)

РЕШЕНИЯ. ОТВЕТЫ

1. 76. **2.** $9\frac{3}{16}$. **3.** $1\frac{19}{24}$. **4.** 0.

5. 67,23. **6.** 1990. **7.** 2,4. **8.** 0,47.

9.
$$\begin{array}{r} 123{,}475 \\ +348{,}274 \\ -\underline{259{,}748} \\ 731{,}497 \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{r} -305{,}678 \\ \underline{208{,}789} \\ 96{,}889 \end{array}$$

11. Первый сомножитель легко найти: $235\,038 : 3 = 78\,346$, а второй сомножитель 341.

12. Единиц второго сомножителя может быть 1 или 6 (так как произведение 4 только на 1 и на 6 оканчивается на 4), но так как произведение 1 на трехзначное число не дает четырехзначного, то единиц должно быть 6, а не 1. Теперь найдем цифру десятков первого сомножителя. Произведение единиц дает 24, значит, десятков в 1-м сомножителе 0 или 5. При умножении сотен 2-го сомножителя, т. е. числа 2 на первый, получается четырехзначное число, причем первая цифра 1 (и при умножении десятков второго сомножителя на первый получается тоже четырехзначное число, начинающееся с 1). Нетрудно видеть, что сотен первого сомножителя 5, а не 6, и десятков 0, а не 5, так как иначе в произведении на месте десятков тысяч не будет 1.

13. $405 \cdot 205$ и $405 \cdot 207$. **14.** $234\,785 \cdot 3215$.
15. $57\,125 \cdot 743$. **16.** $888 \cdot 888$ или $978 \cdot 888$.
17. $396 \cdot 376$. **18.** $9374 \cdot 82$.
19. $7286 \cdot 575$. **20.** $237 \cdot 31\,245$.
21. 0 или 6. **22.** 8280.

23. 1)
$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}438\\45\end{array}\\ \hline 2190\\ +\,1752\\ \hline 19710\end{array}$$

2) $19\,710 + 44 = 19\,754$ (неверное делимое).
3) $13\,759$ — верное делимое.
4) $13\,759 : 45 = 305$ (частное), остаток 34.

24. 1)
$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}389\\105\end{array}\\ \hline 1945\\ +\,389\\ \hline 40845\end{array}$$

2) $40\,845 + 16 = 40\,861$ (неверное делимое).
3) $46\,801$ — верное делимое, частное 445, остаток 76.

25. 74 044, так как искомая сумма на 1606 больше того, что получил ученик.

26. $1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$;
$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$;
$123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100$;
$123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100$;
$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100$;
$123 - 45 - 67 + 89 = 100$.

27. $2 + 100 = 102$ — сумма крайних членов или сумса членов равно отстоящих от крайних членов.

$102 \cdot 25 = 2550$ — сумма 25 пар чисел, т. е. сумма всех четных от 2 до 100.

28. Задуманное число делится на 7, на 11 и на 13, таким наименьшим числом является $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$. Задуманным числом может быть любое число, большее 1001 в целое число раз.

29. 5. Число $1591 = 37 \cdot 43$, а $1517 = 37 \cdot 41$.

30. 2. Число $2173 = 53 \cdot 41$, а $1643 = 31 \cdot 53$.

31. 12.

32. 10.

33. 2. Прежде чем производить указанные действия, следует сократить некоторые из данных дробей:

$$\frac{3535}{88375} = \frac{1}{25}; \quad \frac{1001}{1365} = \frac{11}{15}; \quad \frac{187}{253} = \frac{17}{23}.$$

34. 0. Три из данных дробей необходимо предварительно сократить:

$$\frac{6105}{11211} = \frac{55}{101}; \quad \frac{9919}{18382} = \frac{109}{202}; \quad \frac{2323}{4040} = \frac{23}{40}.$$

35. 0. Дробь $\frac{17 : 3125}{8 : 6250} = \frac{17 \cdot 6250}{3125 \cdot 8} = 4\frac{1}{4}$

36. I способ

Указание.

$$254 \cdot 399 - 145 = 254 \cdot 399 - 399 + 399 - 145 =$$
$$= 253 \cdot 399 + 254.$$

II способ

$$254 \cdot 399 - (399 - 254) = 254 \cdot 399 - 399 + 254 =$$
$$= 253 \cdot 399 + 254.$$

37. 1.

38. 1.

39. $\frac{1}{6}$. Представим каждую из данных дробей в виде разности двух дробей, например, $\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$;

$$\frac{1}{30} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{42} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \text{ и т. д.}$$

40. $\frac{9}{10}$. Решение аналогично № 39.

41. $\frac{1}{20}$. **42.** $\frac{112}{305}$. **43.** $3\frac{29}{72}$.

44. $\frac{7}{22}$. Сначала 10 101 умножим на каждое из трех слагаемых, при этом сократим каждую из полученных дробей.

45. $\frac{3}{14}$. **46.** 20. Нетрудно видеть, что делимое, стоящее в скобках, равно $\frac{1}{2}$, а делитель 4, следовательно, частное равно $\frac{1}{8}$. Дробь $\frac{80\,808\,080}{91\,919\,191} = \frac{80}{91}$. **47.** 404.

48. 1,01. **49.** 15,95.

50. Если прибавить к искомому числу единицу, тогда полученное число будет делиться на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, на 7, на 8, на 9, на 10.

Таким наименьшим числом является $10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 = 2520$, а искомое число на 1 меньше, т. е. 2519.

51. 959.

52. НОК (131, 1965) = 1965.

Если 30 000 разделить на 1965, то в частном получим 15 и в остатке 525.

$1965 \cdot 15 = 29\,475$; $29\,475 + 125 = 29\,600$ (наибольшее искомое число).

29 600; 27 635; 25 670 — искомые числа.

53. 13 965; 12 000; 10 035.

54. Да, так как 225 делится на 75 и 150 делится на 75, следовательно, остаток равен нулю. Данное число можно записать так: $225 \cdot x + 150$, где x — частное. На основании делимости суммы ясно, что данное число делится на 75.

55. Так как число ножей и вилок (вместе) кратно 10 и 12, значит, оно делится на НОК (10 и 12) = 60. Между числами 300 и 400 только 360 делится на 60.

Ножей 100 штук, а вилок 260.

56. Частное не изменится, а остаток увеличится в 3 раза.

57. Частное не изменится, если делимое и делитель уменьшить в одно и то же число раз, а остаток уменьшится в 6 раз и станет равным 4.

58. Сумма двух чисел — число нечетное, следовательно, одно слагаемое — четное, а другое — нечетное. Произведение четного числа на любое целое число есть число четное.

59. 1) Если каждое из трех слагаемых при делении на 3 дает остаток 1 или 2, то сумма этих слагаемых делится на 3.

2) Если каждое из двух слагаемых при делении на 3 дает остаток 1, а третье — 2, то, значит, сумма одного из первых двух слагаемых и третьего разделится на 3.

3) Если каждое из двух слагаемых при делении на 3 дает остаток, равный 2, а третье — 1, то сумма любого из первых двух и третьего делится на 3.

60. Из трех последовательных натуральных чисел обязательно одно кратно 3, а из двух последовательных четных — одно кратно 4. Следовательно, произведение этих трех чисел делится и на 3, и на 2, и, кроме того, на 4, т. е. на $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

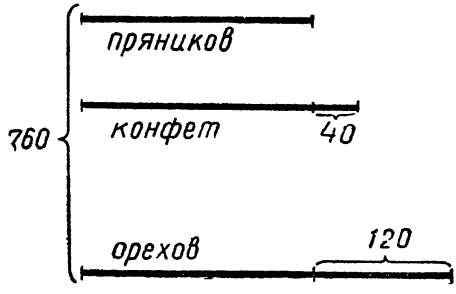


Рис. 1

61. Из рисунка 1 видно, что пряников было 200 штук, орехов 320, а конфет 240. НОД (200, 240, 320) = 40. Наибольшее количество подарков 40.

62. 1) 1 *ч* 30 *мин* + 10 *мин* = 1 *ч* 40 *мин* = 100 *мин* (период обращения 1-го автобуса).

2) 1 *ч* 50 *мин* + 10 *мин* = 2 *ч* = 120 *мин* (период обращения 2-го автобуса).

3) 1 *ч* 10 *мин* + 10 *мин* = 1 *ч* 20 *мин* = 80 *мин* (период обращения 3 го автобуса).

4) НОК (100, 120) = 100 6 = 600 (600 *мин*, т. е. через 10 *ч* 1-й и 2-й автобусы выйдут одновременно).

5) НОК (120. 80) = 120 · 2 = 240, 240 *мин* = 4 *ч*. Через 4 *ч* 2-й и 3 й автобусы выйдут одновременно со станции.

6) НОК (100; 120; 80) = 120 · 5 · 2 = 1200;

1200 *мин* = 20 *ч* Через 20 *ч* 1-й, 2-й и 3-й автобусы выйдут одновременно.

63. 70 = 2 · 5 · 7; 56 = 2 · 7 · 4.

1) НОК (70,56) = 70 · 4 = 280. Через каждые 280 *см* следы отца и сына совпадают.

2) 280 · 10 = 2800 (*см*); 2800 *см* = 28 *м* — расстояние между деревьями.

64. Наибольший общий делитель числителя и знаменателя несократимой дроби равен 1, значит, НОД суммы числителя и знаменателя со знаменателем равен 1, т. е. и вновь полученная дробь несократима.

65. НОД числителя и знаменателя несократимой дроби равен 1, следовательно, НОД разности знаменателя и числителя со знаменателем тоже равен 1.

66. Среди любых 11 чисел всегда имеются по крайней мере два таких числа, которые оканчиваются одной и той же цифрой (так как цифр всего 10), а, значит, разность этих двух чисел оканчивается нулем, т. е. разность кратна 10.

67. Так как НОК — это произведение первого числа на недостающие множители второго числа, то во втором числе невзятыми оказались множители, которые уже есть в первом числе (т. е. их НОД). Значит, произведение НОК на НОД равно произведению данных чисел.

68. 630 : 18 = 35 (5 · 7 — произведение различных множителей данных чисел.) Так как одно число не делится на другое, то эти числа могут быть только 5 · 18 = 90 и 7 · 18 = 126.

69. НОК (35; 28) = 140; НОД (396; 297) = 99, значит, $\frac{140}{99}$ — наименьшее из всех чисел, при делении которого

на каждую из дробей $\frac{35}{396}$ и $\frac{28}{297}$ получатся целые числа. Действительно, $\frac{140}{99} : \frac{35}{396} = 16$ (целое), $\frac{140}{99} : \frac{28}{297} = 15$ (целое).

70. НОК (15 и 35) = 105; НОД (8 и 18) = 2; значит, $\frac{2}{105}$ — наибольшее число, при делении на которое $\frac{8}{15}$ и $\frac{18}{35}$ дают в частном целые числа. Действительно, $\frac{8}{15} : \frac{2}{105} = 28$ (целое), $\frac{18}{35} : \frac{2}{105} = 27$ (целое).

71. 1) $13{,}375 \cdot 2 = 26{,}75$ — частное;
2) $26{,}75 \cdot 2 = 53{,}5$ — удвоенное частное;
3) $53{,}5 \cdot 4 = 214$ — делимое;
4) $214 : 26{,}75 = 8$ — делитель.

72. 4104; 8100; 9108. **73.** 9135; 5130.
74. $\approx 4{,}5$ *т.*
75. $\approx 9{,}4$ *куб. м.*
76. 31,25 *км.*
77. 8 *км.*
78. 181,25 руб.
79. $\approx 0{,}55$.
80. ≈ 667 *ч.*
81. 26 400.
82. 190 *км*, 320 *км*, 80 *км.*
83. 45 *км*, 205 *км*, 225 *км.*
84. Первое число больше второго в 10 раз: 450 и 45.
85. 1) $37{,}75 \cdot 3 = 113{,}25$ — утроенная сумма данных чисел или сумма утроенного первого числа с утроенным вторым числом.

2) $154{,}25 - 113{,}25 = 41$ — удвоенное первое число.
3) $41 : 2 = 20{,}5$ — первое число.
4) $37{,}75 - 20{,}5 = 17{,}25$ — второе число.

86. I способ (арифметический)

1 — возраст сына в 1966 году, тогда возраст матери в 1966 году составит 4,5 таких единиц.

1) $4{,}5 - 1 = 3{,}5$ (части) составляют 28 лет.
2) $28 : 3{,}5 = 8$ (лет) сыну в 1966 году.
3) $1972 - 1966 = 6$ (лет) прошло с 1966 года.

4) $8 + 6 = 14$ (лет) сыну в 1972 году.
5) $14 + 28 = 42$ (года) матери в 1972 году.

II способ (алгебраический)

x лет сыну в 1966 году, $4{,}5x$ лет матери в 1966 году, тогда $4{,}5x - x = 28$; откуда $x = 8$.

87. 14 и 23.

88. I способ (арифметический)

1 — стало во втором ящике, тогда 0,73 — стало в первом ящике.

1) $1 + 0{,}73 = 1{,}73$ (части) приходится на 43,25 *кг*.
2) $43{,}25 : 1{,}73 = 25$ (*кг*) стало во втором ящике.
3) $25 - 4{,}75 = 20{,}25$ (*кг*) было во втором ящике.
4) $43{,}25 - 20{,}25 = 23$ (*кг*) было в первом ящике.

II способ (алгебраический)

x *кг* стало во втором ящике и $0{,}73x$ *кг* стало в первом ящике, тогда $x + 0{,}73x = 43{,}25$; откуда $x = 25$.

89. 28,5 *т* и 31,5 *т*.

90. I способ

1 часть — 0,75 площади, вспаханной первым, или $\frac{2}{3}$ площади, вспаханной вторым.

1) $1 : 0{,}75 = 1\frac{1}{3}$ (части) приходится на площадь, которую вспахал первый трактор.

2) $1 : \frac{2}{3} = 1{,}5$ (части) приходится на площадь, которую вспахал второй трактор.

3) $1\frac{1}{3} \cdot 1{,}5 = 2$ (части) приходится на площадь, которую вспахал третий трактор.

4) $116 : \left(1{,}5 + 1\frac{1}{3} + 2\right) = 24$ (*га*) приходятся на 1 часть.

5) $24 \cdot 1\frac{1}{3} = 32$ (*га*) вспахал первый трактор.

6) $24 \cdot 1{,}5 = 36$ (*га*) вспахал второй трактор.
7) $24 \cdot 2 = 48$ (*га*) вспахал третий трактор.

II способ

1) Если x — первое число, а y — второе число, то $0{,}75x = \frac{2}{3}y$; откуда $x : y = 8 : 9$.

2) $8 \cdot 1{,}5 = 12$ (частей) составляют площадь, вспаханную третьим трактором.

3) $\frac{116 \cdot 8}{8+9+12} = 32$ (*га*) вспахал первый трактор.

4) $\frac{116 \cdot 9}{29} = 36$ (*га*) вспахал второй трактор.

5) $32 \cdot 1{,}5 = 48$ (*га*) вспахал третий трактор.

III способ (алгебраический)

Если x *га* вспахал первый, тогда $\frac{9x}{8}$ *га* вспахал второй и $1{,}5x$ *га* третий, откуда $x + 1\frac{1}{8}x + 1{,}5x = 116$, получим $x = 32$.

91. 1) $0{,}3 \cdot 3 = 0{,}9$ количества яблок первой корзины равны 0,36 количества яблок второй корзины.

2) 1 часть — количество яблок первой корзины, тогда $0{,}9 : 0{,}36 = 2{,}5$ (части) — количество яблок второй корзины.

3) $140 : (1 + 2{,}5) = 40$ (яблок) в первой корзине.

4) $140 - 40 = 100$ (яблок) во второй корзине.

92. 0,24 руб.; 0,06 руб.; 0,15 руб.

Примем за единицу стоимость одной линейки, тогда стоимость одного альбома составит четыре такие единицы. Пять линеек стоят столько же, сколько два циркуля, на стоимость двух циркулей приходится пять единиц, значит, стоимость одного циркуля составит 2,5 единицы $(5 : 2 = 2{,}5)$.

93. 0,8 руб.; 1,2 руб.; 0,6 руб.

94. 50 *г* весит каждый сосуд, 200 *г* воды в сосуде B, 150 *г* воды в сосуде A.

95. 1) $0{,}45 = \frac{9}{20}$; $0{,}36 = \frac{9}{25}$; $\frac{9}{20}$ лома, собранного в первый день, равны $\frac{9}{25}$ лома, собранного во второй день, значит, $\frac{1}{20}$ лома, собранного в первый день, равна $\frac{1}{25}$ лома, собранного во второй день. За 1 примем $\frac{1}{20}$ лома, собранного в первый день, тогда вес лома первого дня составит 20 единиц $\left(1 : \frac{1}{20} = 20\right)$, а второго дня 25 единиц $\left(1 : \frac{1}{25} = 25\right)$.

2) $20 + 25 = 45$ (*ед*) приходится на 630 *кг* лома.

3) $630 : 45 = 14$ (*кг*) приходится на 1 часть.

4) $14 \cdot 20 = 280$ (*кг*) собрали в первый день.
5) $14 \cdot 25 = 350$ (*кг*) собрали во второй день.

96. 60 коп., 75 коп.

97. I способ

Скорость второго мотоцикла 1, тогда скорость первого мотоцикла 0,6.

1) 10 *ч* 50 *мин* — 8 *ч* = 2 *ч* 50 *мин*, $2\frac{5}{6}$ *ч* шел первый до выхода второго.

2) $0{,}6 \cdot 2\frac{5}{6} = 1{,}7$ (части) составляет расстояние, пройденное первым мотоциклом до выхода второго из *B*.

3) $1 - 0{,}6 = 0{,}4$ (части) догоняет за час второй первого.

4) $1{,}7 : 0{,}4 = 4\frac{1}{4}$ (часа) за столько времени второй мотоцикл догонит первый.

5) 10 *ч* 50 *мин* + 4 *ч* 15 *мин* = 15 *ч* 5 *мин* (в такое время второй догнал первого).

6) $0{,}4 \cdot 2\frac{1}{2} = 1$ (часть) приходится на 30 *км*, следовательно, скорость второго мотоцикла 30 *км/ч*.

7) $30 \cdot 4\frac{1}{4} = 127{,}5$ (*км*) — на таком расстоянии от *B* второй мотоцикл догнал первый.

II способ

1) x *км/ч* — скорость второго мотоцикла,
$0{,}6\ x$ *км/ч* — скорость первого мотоцикла, отсюда
$(x - 0{,}6\ x) \cdot 2{,}5 = 30$; $x = 30$.
30 *км/ч* — скорость второго мотоцикла,
18 *км/ч* — скорость первого мотоцикла.

2) $18 \cdot 2\frac{5}{6} = 51$ (*км*) — расстояние, пройденное первым до выхода второго.

3) $30 - 18 = 12$ (*км/ч*) — на 12 *км* второй приближается к первому за час.

4) $51 : 12 = 4{,}25$ (*ч*) — за столько времени второй догонит первого.

5) $30 \cdot 4{,}25 = 127{,}5$ (*км*) — на таком расстоянии от *B* второй догонит первого.

98. 9 руб. 60 коп.

99. 1) $17 + 83 = 100$ (частей) приходится на числитель и знаменатель полученной дроби.

2) $52\,367 + 47\,633 = 100\,000$ (эта сумма числителя и знаменателя дроби не изменится, если из числителя вычесть любое число и его же прибавить к знаменателю).

3) $100\,000 : 100 = 1000$ (приходится на 1 часть, это и есть то число, на которое сокращали полученную дробь).

4) $1000 \cdot 17 = 17\,000$ (числитель полученной дроби).

5) $52\,367 - 17\,000 = 35\,367$ (искомое число).

100. 57 843. **101.** Искомая дробь $\frac{1449}{2691}$.

102. Знаменатель больше числителя на 7 частей

$$11 - 4 = 7.$$

Число 3521 состоит из 7 равных частей.

$3521 : 7 = 503$ (приходится на 1 часть, т. е. дробь сократили на 503).

$$\frac{4 \cdot 503}{11 \cdot 503} = \frac{2012}{5533}.$$

103. Разность увеличилась на $75{,}1 - 0{,}7 = 74{,}4$ за счет увеличения уменьшаемого в пять раз. Значит, 74,4 равно учетверенному уменьшаемому. Отсюда большее число $74{,}4 : 4 = 18{,}6$, а меньшее $18{,}6 - 0{,}7 = 17{,}9$.

104. $50\frac{3}{14}$ и $5\frac{5}{7}$. **105.** 3,08; 16,94.

106. Большее слагаемое — 1 часть, тогда меньшее слагаемое — 0,25 части.

1) $1 + 0{,}25 = 1{,}25$ (части) большего слагаемого составляет сумма.

2) $0{,}25 : 1{,}25 = 0{,}2$ — большее число.

3) $0{,}25 - 0{,}2 = 0{,}05$ — меньшее число.

107. 1,5 и 0,9.

108. I способ

1) 13 *ч* 15 *мин* — 9 *ч* 25 *мин* = 3 *ч* 50 *мин* — затратил пешеход на путь от *А* до *Б*.

2) 14 *ч* 40 *мин* — 11 *ч* = 3 *ч* 40 *мин* — затратил пешеход на путь от *Б* до *А*.

3) $12 : 3\frac{5}{6} = 3\frac{3}{23}$ (*км/ч*) — скорость на пути от *А* до *Б*.

4) $12 : 3\frac{2}{3} = 3\frac{3}{11}$ (*км/ч*) — скорость на пути от *Б* до *А*.

5) $11 - 9\frac{5}{12} = 1\frac{7}{12}$ (*ч*) — шел он в первый день до 11 *ч*.

6) $\frac{72}{23} \cdot 1\frac{7}{12} = 4\frac{22}{23}$ (*км*) — прошел пешеход до 11 *ч* утра в первый день.

7) $12-4\frac{22}{23}=7\frac{1}{23}$ (*км*) — расстояние, которое ему осталось пройти с 11 *ч*.

Далее можно считать, что два пешехода выходят одновременно (в 11 *ч*) из двух пунктов навстречу друг другу, скорости которых даны.

8) $3\frac{3}{23}+3\frac{3}{11}=6\frac{102}{253}$ (*км/ч*) — на столько километров в час они сближаются.

9) $7\frac{1}{23}:6\frac{102}{251}=1\frac{1}{10}$ (*ч*) — через столько времени они встретятся.

10) $3\frac{3}{23}\cdot 1\frac{1}{10}=3\frac{51}{115}$ (*км*) — прошел пешеход с 11 *ч* до встречи, когда шел от *А* до *Б*.

11) $3\frac{51}{115}+4\frac{22}{23}=8{,}4$ (*км*) — на таком расстоянии от *А* находится то место, через которое он проходил в один и тот же час каждый из этих дней.

II способ[1]

Построим график движения (рис. 2).

За единицу расстояния (1 *км*) удобно принять 10 *мм*, а за единицу времени (1 *ч*) — 12 *мм*.

Из этого графика нетрудно увидеть, что искомый пункт находится на расстоянии 8,4 *км* от *А*.

109. 7,5 *км/ч* и 10 *км/ч*.

110. 1) $75\frac{1}{4}:\frac{7}{12}=129$ (*км*) — расстояние от *А* до *В*.

2) $12-5\frac{3}{5}=6\frac{2}{5}$ (*ч*) ехал первый велосипедист до встречи со вторым.

3) $12-7\frac{1}{4}=4\frac{3}{4}$ (*ч*) ехал второй велосипедист до встречи с первым.

4) $\frac{3}{4}\cdot 4\frac{3}{4}=3\frac{9}{16}$ (*км*) — на столько больше проехал второй, чем первый за $4\frac{3}{4}$ *ч*.

5) $129-3\frac{9}{16}=125\frac{7}{16}$ (*км*) — проехали бы оба вместе за то же время, если бы и второй ехал со скоростью первого.

---

[1] См.: А. И. Островский и Б. А. Кордемский, Геометрия помогает арифметике, стр. 96.

6) $6\frac{2}{5}+4\frac{3}{4}=11\frac{3}{20}$ (*ч*) — за столько времени первый велосипедист мог бы проехать $125\frac{7}{16}$ *км*.

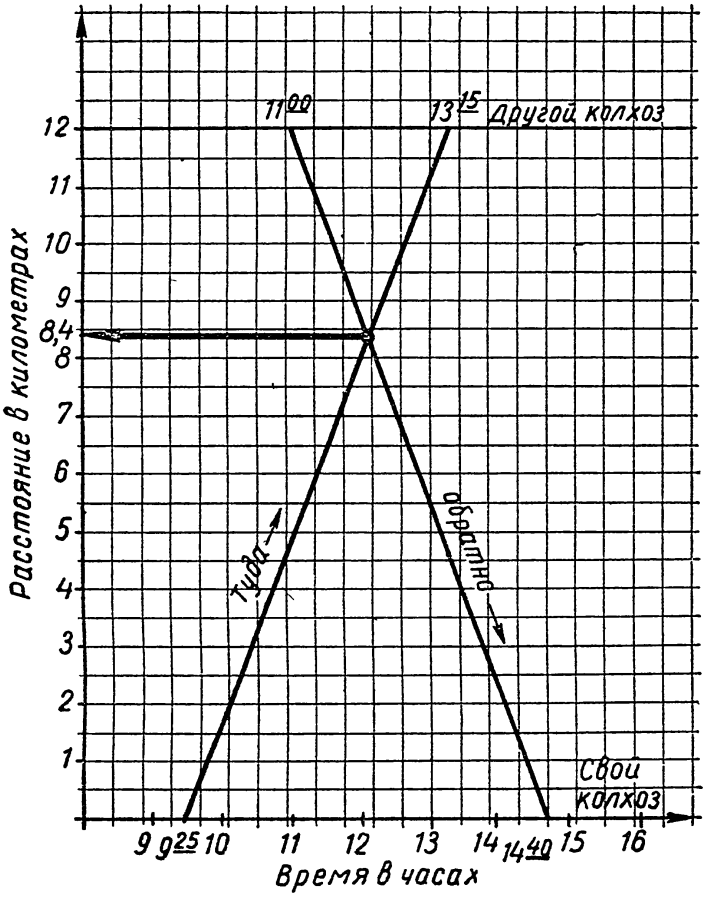


Рис. 2

7) $125\frac{7}{16}:11\frac{3}{20}=11\frac{1}{4}$ (*км/ч*) — скорость первого велосипедиста.

8) $11\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=12$ (*км/ч*) — скорость второго велосипедиста.

111. 1) $6\frac{3}{4}-6=\frac{3}{4}$ (*ч*) — шла грузовая машина до выхода автобуса.

2) $8 \cdot \frac{3}{4} = 6$ (*км*) прошел автобус больше, чем грузовая машина за $\frac{3}{4}$ *ч*.

3) $114 - 6 = 108$ (*км*) прошли бы они, если бы скорости были равными.

4) $7\frac{1}{2} - 6 = 1\frac{1}{2}$ (*ч*) шла грузовая машина.

5) $7\frac{1}{2} - 6\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ (*ч*) шел автобус.

6) $1\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$ (*ч*) — за столько времени грузовая машина может пройти одна 108 *км*.

7) $108 : 2\frac{1}{4} = 48$ (*км/ч*) — скорость грузовой машины.

8) $48 + 8 = 56$ (*км/ч*) — скорость автобуса.

112. 1) $10\frac{5}{6} - 8\frac{1}{3} = 2\frac{1}{2}$ (*ч*) шла легковая машина.

2) $10\frac{5}{6} - 9\frac{1}{2} = 1\frac{1}{3}$ (*ч*) шел автобус.

3) $2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} = 1\frac{1}{6}$ (*ч*) — на столько времени больше в пути была легковая машина, чем автобус.

4) $36 \cdot 2\frac{1}{2} = 90$ (*км*) — прошла легковая машина за счет большей скорости.

5) $160 - 90 = 70$ (*км*) — прошла легковая машина, так как в пути была на 1 *ч* 10 *мин* больше, чем автобус.

6) $70 : 1\frac{1}{6} = 60$ (*км/ч*) — скорость грузовой машины.

7) $60 + 36 = 96$ (*км/ч*) — скорость легковой машины.

113. 1) $75 : 3 = 25$ (*м/сек*) — скорость второго поезда относительно моего поезда.

25 *м/сек* $= \frac{25 \cdot 3600}{1000}$ *км/ч* $= 90$ *км/ч*.

2) $90 - 40 = 50$ (*км/ч*) — скорость второго поезда.

114. 1) $0{,}7 : \frac{50}{60 \cdot 60} = 50{,}4$ (*км/ч*) — скорость поезда.

2) $50{,}4 \cdot \frac{1}{4 \cdot 60} = 0{,}21$ (*км*) — длина поезда 210 *м*.

115. I способ

1) $50 + 70 = 120$ (*м*) — на столько сближались мальчики в минуту.

2) $840 : 120 = 7$ (*мин*) — через столько времени они встретились в первый раз.

3) 9 *ч* $+ 7$ *мин* $= 9$ *ч* 7 *мин* — во столько времени произошла первая встреча.

4) $840 \cdot 2 = 1680$ (*м*) — такое расстояние они пройдут вместе от первой встречи до второй.

5) $1680 : 120 = 14$ (*мин*) — через столько минут после первой встречи мальчики встретятся вновь.

6) 9 *ч* 7 *мин* $+ 14$ *мин* $= 9$ *ч* 21 *мин* — во столько времени мальчики встретятся второй раз.

II способ

На горизонтальной оси откладываем время t, а на вертикальной расстояние S. Координаты точки O (9 *ч*, 0 *м*). Зная скорости мальчиков, можно построить графики их движения, точки пересечения которых дадут ответ задачи, т. е. 9 *ч* 7 *мин* и 9 *ч* 21 *мин*. Можно легко найти, на каком расстоянии от дома Пети (или Коли) происходили встречи.

116. 9 *ч* 15 *мин*, 9 *ч* 39 *мин*.

117. 1) $1 : 2\frac{7}{10} = \frac{10}{27}$ части пути от A до B проходит „Волга“ за 1 *ч*.

2) $1 : 3\frac{3}{5} = \frac{5}{18}$ части всего пути от A до B проходит „Москвич“ за 1 *ч*.

3) $\frac{10}{27} + \frac{5}{18} = \frac{35}{54}$ части пути от A до B проходят обе машины за час.

4) $\frac{5}{18} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{54}$ части пути от A до B прошел „Москвич“ за 20 *мин*.

5) $1 - \frac{5}{54} = \frac{49}{54}$ части пути от A до B прошли обе машины с 7 *ч* 20 *мин* до момента встречи.

6) $\frac{49}{54} : \frac{35}{54} = 1{,}4$ (*ч*). Через 1,4 *ч* после выхода „Волги“ машины встретились, т. е. в 8 *ч* 44 *мин*.

118. 1) $43{,}8 - 11{,}4 = 32{,}4$ (*км*) — двойное расстояние, пройденное вторым автобусом.

2) $32{,}4 : 2 = 16{,}2$ (*км*) — расстояние, пройденное вторым автобусом.

3) $16{,}2 + 11{,}4 = 27{,}6$ (*км*) — расстояние, пройденное первым автобусом.

4) $27{,}6 : 0{,}75 = 36{,}8$ (*км/ч*) — скорость первого автобуса.

5) 45 *мин* — 25 *мин* = 20 *мин* — время движения второго автобуса.

6) $16{,}2 : \frac{1}{3} = 48{,}6$ (*км/ч*) — скорость второго автобуса.

119. 1 — все расстояние от A до B.

1) $(1 : 12 + 1 : 10) \cdot 7 = 1\frac{17}{60}$ всего пути проехали оба автобуса за 7 *ч*.

2) $1\frac{17}{60} - 1 = \frac{17}{60}$ всего пути составляют 136 *км*.

3) $136 : \frac{17}{60} = 480$ (*км*) — путь от A до B.

120. 300 *км*.

121. 1) $1 : 8\frac{1}{2} = \frac{2}{17}$ всего пути проходит грузовая машина за час.

2) $1 : 7\frac{1}{2} = \frac{2}{15}$ всего пути проходит автобус за час.

3) $\frac{2}{17} + \frac{2}{15} = \frac{64}{17 \cdot 15}$ всего пути проходит автобус и легковая машина за час.

4) $1 : \frac{64}{17 \cdot 15} = \frac{17 \cdot 15}{64}$ (*ч*) — через столько времени машины встретились.

5) $150 : \frac{17 \cdot 15}{64} = \frac{640}{17}$ (*км/ч*) — скорость грузовой машины.

6) $\frac{640}{17} \cdot 8\frac{1}{2} = 320$ (*км*) — расстояние от A до B.

122. 40,5 *км/ч*; 35,1 *км/ч*.

123. 84 *км/ч*; 100 *км/ч*.

124. I способ

1) $560 : 4 = 140$ (*км/ч*) — сумма скоростей автомобилей.

2) 0,85 скорости первого и 1,2 скорости второго равны 140 *км*, значит, 0,15 скорости первого равны 0,2 скорости второго, а поэтому, если скорость первого обозначить 1, то скорость второго составит $0{,}15 : 0{,}2 = 0{,}75$ таких единиц.

3) $140 : (1 + 0{,}75) = 80$ (*км/ч*) — скорость первого автомобиля.

4) $80 \cdot 0{,}75 = 60$ (*км/ч*) — скорость второго автомобиля.

II способ (алгебраический)

x *км/ч* — скорость первого автомобиля, $(140 - x)$ *км/ч* — скорость второго автомобиля, тогда
$0{,}85x + 1{,}2(140 - x) = 140$, откуда $x = 80$.

125. $1 : \left(\frac{1}{3} : 54 + \frac{1}{3} : 45 + \frac{1}{3} : 60\right) \approx 52{,}3$.

126. $\approx 18{,}5$ *км/ч*.

127. 1) $350 - 280 = 70$ (*км/ч*) — на столько первый самолет уходит от второго за час.

2) $70 \cdot 2 = 140$ (*км/ч*) — на столько первый самолет ушел от второго.

3) $280 - 230 = 50$ (*км/ч*) — на столько километров в час второй самолет стал сближаться с первым.

4) $140 : 50 = 2{,}8$ (*ч*) — через столько часов второй догонит первый после того, как изменилась скорость первого.

5) $2 + 2{,}8 = 4{,}8$ (*ч*) — столько времени они летели до тех пор, пока второй догнал первый.

6) $280 \cdot 4{,}8 = 1344$ (*км*) — на таком расстоянии второй самолет догнал первый.

128. 1) $50 - 35 = 15$ (*км/ч*) — разность скоростей.

2) $50 \cdot 1 = 50$ (*км*) — на столько больше расстояния AB пройдет лодка за назначенное время, делая по 50 *км/ч*.

3) $35 \cdot 2 = 70$ (*км*) — столько километров не дойдет лодка до B, делая по 35 *км/ч*.

4) $50 + 70 = 120$ (*км*) — на столько больше пройдет лодка за назначенное время, идя с большей скоростью.

5) $120 : 15 = 8$ (*ч*) — назначенное время.

6) $8 - 1 = 7$ (*ч*) шла лодка со скоростью 50 *км/ч*.

7) $50 \cdot 7 = 350$ (*км*) — расстояние от A до B.

129. 500 *км*; в 8 *ч* вечера.

130. Примем за 1 тот путь, который проходит первый велосипедист за 5 *ч* 15 *мин*, а второй за 4 *ч* 40 *мин*.

1) $1 : 5\frac{1}{4} = \frac{4}{21}$ этого пути проходит первый велосипедист за час.

2) $1 : 4\frac{2}{3} = \frac{3}{14}$ этого пути проходит второй велосипедист за час.

3) $8{,}5 - 8 = 0{,}5$ (часа) ехал первый до выхода второго.

4) $\frac{4}{21} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{21}$ пути в выбранных единицах проехал первый за 0,5 *ч*.

5) $\frac{3}{14} - \frac{4}{21} = \frac{1}{42}$. На $\frac{1}{42}$ этого пути проходит за час второй больше, чем первый.

6) $\frac{2}{21} : \frac{1}{42} = 4$ (*ч*). Через 4 *ч* второй догонит первого, т. е. в 13 *ч* 15 *мин*.

131. 1) $60{,}9 - 40{,}6 = 20{,}3$ (*км/ч*) — на столько первый опережает второго за час.

2) $7 - 2 = 5$ (*ч*) — на столько первый был в пути больше второго.

3) $40{,}6 \cdot 5 = 203$ (*км*) — на столько опередил первый мотоциклист второго к моменту прибытия в *B*.

4) $203 : 20{,}3 = 10$ (*ч*) — за столько времени первый прошел расстояние от *A* до *B*.

132. 1) 7 *ч* 50 *мин* — 4 *ч* 30 *мин* = 3 *ч* 20 *мин* был в пути колхозник.

2) $3\frac{3}{4} - 3\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$ (*ч*) — на столько времени колхозник был в пути меньше на самом деле, чем по предположению.

3) $1{,}2 \cdot 3\frac{3}{4} = 4{,}5$ (*км*) прошел колхозник за счет большей скорости за $3\frac{3}{4}$ *ч*.

4) $4{,}5 : \frac{5}{12} = 10{,}8$ (*км/ч*) — скорость колхозника.

5) $10{,}8 \cdot 3\frac{1}{3} = 36$ (*км*) — расстояние от *A* до города.

133. 1) 14 *ч* — 8 *ч* = 6 *ч* шел автобус.

2) 13 *ч* 30 *мин* — 9 *ч* = 4 *ч* 30 *мин* была в пути легковая машина.

3) $20 \cdot 4{,}5 = 90$ (*км*) — на такое расстояние прошла легковая машина больше автобуса за 4,5 *ч* (за счет большей скорости).

4) $6 - 4{,}5 = 1{,}5$ (*ч*) — на столько часов автобус был в пути больше легковой машины.

5) $90 : 1{,}5 = 60$ (*км/ч*) — скорость автобуса.

6) $60 + 20 = 80$ (*км/ч*) — скорость легковой машины.

7) $9-8=1$ (*ч*) — на столько времени раньше вышел автобус и за это время до выхода легковой машины прошел 60 *км*.

8) $60:20=3$ (*ч*) — через столько времени после выхода легковой машины она догонит автобус.

9) $80\cdot 3=240$ (*км*) — на таком расстоянии от пункта *A* легковая машина догонит автобус.

134. I способ

1) $12\frac{3}{4}\cdot 2\frac{2}{3}=34$ (*км*) проехал бы нарочный, если все 2 *ч* 40 *мин* ехал на велосипеде.

2) $70{,}5-34=36{,}5$ (*км*) — расстояние, которое проехал он на мотоцикле за счет большей скорости.

3) $67{,}5-12{,}75=54{,}75$ (*км/ч*) — разность скоростей мотоцикла и велосипеда.

4) $36{,}5:54{,}75=\frac{2}{3}$ (*ч*) он ехал на мотоцикле.

5) $2\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=2$ (*ч*) ехал на велосипеде.

II способ (рис. 3)

$AB=70{,}5$ *км*; $ON=2$ *ч* 40 *мин*. Через точку $N\left(t=2\frac{2}{3}\ ч\right)$ проведем $MN\parallel AB$; $BM\parallel ON$. OD — график движения велосипедиста (скорость его известна и вышел он из A).

Чтобы построить график движения нарочного на мотоцикле, найдем две его точки, одной из которых возьмем $M\left(2\frac{2}{3};\ 70{,}5\right)$, а другой — точку K (точка K на рисунке 3 не показана), где K — точка, в которой был мотоциклист за 20 *мин* до приезда в M. Следовательно, находясь в точке K, мотоциклист проедет еще 22,5 *км* $\left(67{,}5\cdot\frac{1}{3}\right)$.

Точка пересечения графиков движения велосипедиста и мотоциклиста покажет, что велосипедист был в пути 2 *ч*, а остальные 40 *мин* ехал на мотоцикле.

135. I способ

1) $15-3{,}75=11{,}25$ (*км/ч*) — на такое расстояние велосипедист опережает пешехода за час.

2) $30 : 11{,}25 = 2\frac{2}{3}$ (*ч*) — через столько времени расстояние между велосипедистом и пешеходом будет 30 *км*.

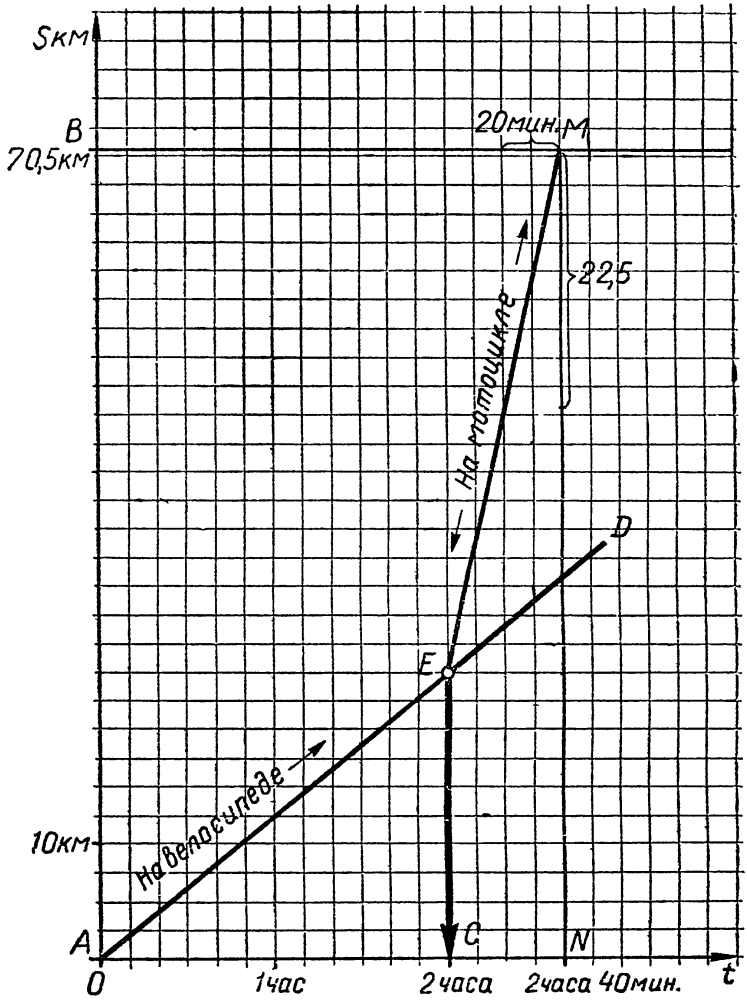


Рис. 3

3) $15 \cdot 2\frac{2}{3} = 40$ (*км*) проехал велосипедист.

4) $70 - 40 = 30$ (*км*) осталось проехать велосипедисту.

5) $30 + 30 = 60$ (*км*) осталось пройти пешеходу.

II способ (рис. 4)

Зная скорости пешехода и велосипедиста, строим графики движения. Из рисунка видно, что между ними

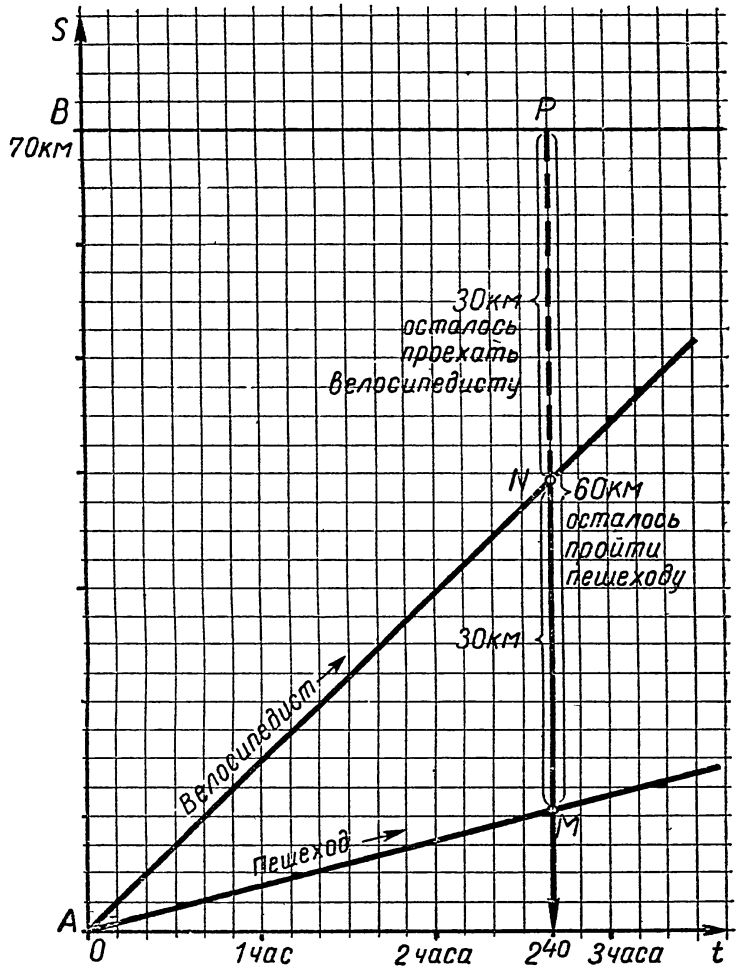


Рис. 4

будет 30 *км* (MN) через 2 *ч* 40 *мин*; в это время пешеходу останется пройти расстояние $MP = 60$ *км*, а велосипедисту $NP = 30$ *км*.

136. 1) $210{,}6 : 40{,}5 = 5{,}2$ (*ч*) — пройдет 210,6 *км* почтовый поезд.

2) 8 *ч* 7 *мин* − 7 *ч* 25 *мин* = 42 *мин* = $\frac{7}{10}$ *ч* — на столько времени скорый поезд был меньше в пути, чем почтовый.

3) 5,2 — 0,7 = 4,5 (*ч*) — столько времени надо скорому поезду, чтобы пройти 210,6 *км*.

4) 210,6 : 4,5 = 46,8 (*км*/*ч*) — скорость скорого поезда.

137. I способ

1) 40 — 30 = 10 (*км*/*ч*) — разность скоростей катера и парохода.

2) 30 · $\frac{2}{3}$ = 20 (*км*) — пройдет пароход за $\frac{2}{3}$ *ч*.

3) 20 : 10 = 2 (*ч*) — за столько времени катер пройдет все расстояние.

4) 40 · 2 = 80 (*км*) — расстояние между пристанями.

II способ

1) Пароход проходит 1 *км* за $\frac{1}{30}$ *ч* = 2 *мин*.

2) Катер проходит 1 *км* за $\frac{1}{40}$ *ч* = 1,5 *мин*.

3) Пароходу на 1 *км* пути надо на 2 − 1,5 = 0,5 (*мин*) больше, чем катеру, а на весь путь 40 *мин*.

4) Значит, весь путь между пристанями 40 : 0,5 = 80 (*км*).

138. 1) 1 : $2\frac{1}{5} = \frac{5}{11}$ расстояния между двумя пунктами проходит второй за час.

2) $\frac{5}{11} : 2\frac{16}{17} = \frac{17}{110}$ того же расстояния проходит первый автомобиль за час.

3) $\frac{5}{11} - \frac{17}{110} = \frac{3}{10}$ того же расстояния нагоняет в час второй автомобиль, догоняя первый.

4) $1 : \frac{3}{10} = 3\frac{1}{3}$ (*ч*), т. е. за 3 *ч* 20 *мин* второй автомобиль догонит первый.

5) 8 *ч* 30 *мин* + 3 *ч* 20 *мин* = 11 *ч* 50 *мин*, т. е. в 11 *ч* 50 *мин* первого нагонит второй.

139. (Решение аналогично № 137.)

$2\frac{1}{3} : \left(\frac{1}{3{,}6} - \frac{1}{12}\right) = 12$ (*км*).

140. $26 : \left(1 : 2\frac{4}{5} - 1 : 4\frac{2}{3}\right) = 182$ (*км*).

141. 1) $1 : 1\frac{1}{4} = \frac{4}{5}$ всей дистанции проходил первый спортсмен за 1 *мин*.

2) $1 : 1\frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ всей дистанции проходил второй спортсмен за 1 *мин*.

3) $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$ на такую часть дистанции первый спортсмен опережает второго за 1 *мин*.

4) 48 *сек* $= \frac{4}{5}$ *мин*.

$\frac{1}{20} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{25}$ — на такую часть дистанции опередил первый второго за 48 *сек*.

5) $20 : \frac{1}{25} = 500$ (*м*) — вся дистанция.

6) $500 \cdot \frac{4}{5} = 400$ (*м/мин*) — скорость первого спортсмена.

7) $500 \cdot \frac{3}{4} = 375$ (*м/мин*) — скорость второго спортсмена.

142. 1) $43{,}2 : 2{,}4 = 18$ (*км/ч*) — скорость моторной лодки по течению.

2) $18 - 1{,}8 \cdot 2 = 14{,}4$ (*км/ч*) — скорость лодки против течения.

3) $43{,}2 : 14{,}4 = 3$ (*ч*) — затратит лодка на этот же путь, идя против течения.

143. 1) $113{,}4 : 9 = 12{,}6$ (*км/ч*) — скорость парохода против течения.

2) $12{,}6 + 1{,}9 \cdot 2 = 16{,}4$ (*км/ч*) — скорость парохода по течению.

3) $113{,}4 : 16{,}4 \approx 7$ (*ч*) — понадобится пароходу, чтобы пройти это расстояние по течению.

144. $1 : \left[\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{48}\right) : 2\right] = 192$ (*ч*).

145. 4,5 *ч* $= 270$ *мин*; 6,3 *ч* $= 378$ *мин*.

$40 \cdot \left\{1 : \left[\left(\frac{1}{270} - \frac{1}{378}\right) : 2\right]\right\} = 75\,600$ (*м*), или **75,6 *км***.

146. 1) $1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$ всего пути осталось пройти, когда еще не были пройдены 40 *км* (рис. 5).

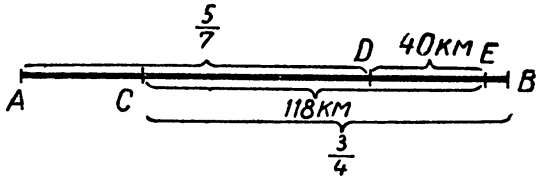


Рис. 5

2) $\frac{3}{4}-\frac{2}{7}=\frac{13}{28}$ всего пути приходится на CD.

3) $118-40=78$ (*км*) приходится на CD.

4) $78:\frac{13}{28}=168$ (*км*) — расстояние от A до B.

147. 1) $1-\left(\frac{1}{3}+\frac{13}{24}\right)=\frac{1}{8}$ всего расстояния, что составляет 14 *км* (рис. 6).

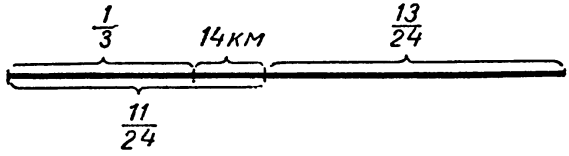


Рис. 6

2) $14:\frac{1}{8}=112$ (*км*) — длина маршрута поезда.

148. 1) $40+20=60$ (*км/ч*) — скорость автомобиля на второй части пути (BC, CD, DE) (рис. 7).

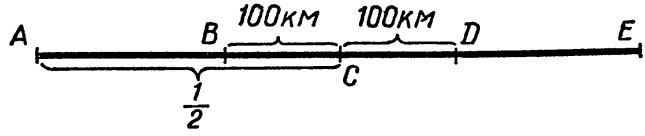


Рис. 7

2) $100\cdot 2=200$ (*км*) — это расстояние (BD) он шел со скоростью 60 *км/ч* (но не только это!).

3) $200:60=3\frac{1}{3}$ (*ч*) потратил автомобиль на прохождение 200 *км*.

4) $10-3\frac{1}{3}=6\frac{2}{3}$ (*ч*) — потратил на два равных отрезка (*AB* и *DE*), которые он шел с различной скоростью.

5) Время движения обратно пропорционально скоростям, если тела проходят равные пути (*AB* и *DE*):

$$t_1 : t_2 = \frac{1}{40} : \frac{1}{60} = 3 : 2.$$

$3 + 2 = 5$ (частей) приходится на $6\frac{2}{3}$ *ч*.

6) $\left(6\frac{2}{3} : 5\right) \cdot 3 = 4$ (*ч*) он шел со скоростью 40 *км/ч*.

7) $40 \cdot 4 = 160$ (*км*) — длина пути на первом участке (*AB*), а значит, и на участке *DE*.

8) $160 + 100 + 100 + 160 = 520$ (*км*) — расстояние между *A* и *B*.

9) $520 : 10 = 52$ (*км/ч*) — средняя скорость.

149. 1) $15 \cdot 4 = 60$ (*км*) — проехал первый товарищ на велосипеде.

2) Второй товарищ ехал 3 *ч* на поезде, скорость которого в 2 раза больше скорости автомобиля, значит, за 3 *ч* он прошел такое же расстояние, что и первый за 6 *ч* на автомобиле.

А так как они проехали одно и то же расстояние (от *A* до *B*), значит, такое расстояние, которое проехал первый на велосипеде, — 60 *км* — второй проехал на автомобиле за 2 *ч*.

$60 : 2 = 30$ (*км/ч*) — скорость автомобиля.

3) $30 \cdot 6 = 180$ (*км*) — расстояние, которое проехал первый на автомобиле.

4) $180 + 60 = 240$ (*км*) — расстояние от *A* до *B*.

150. 1) $11{,}25 - 5 = 6{,}25$ (*ч*) — шел поезд с увеличенной скоростью.

2) $1 - 0{,}4 = 0{,}6$ всего пути поезд шел с увеличенной скоростью.

3) $0{,}6 : 6{,}25 = 0{,}096$ всего пути проходил поезд в час после увеличения скорости.

4) $0{,}4 : 5 = 0{,}08$ всего пути проходил поезд в час первоначально.

5) $0{,}096 - 0{,}08 = 0{,}016$ всего пути составляют 10,8 *км*.

6) $10{,}8 : 0{,}016 = 675$ (*км*) — весь путь.

151. 1 — весь путь.

1) $1 - 0{,}75 = 0{,}25$ всего пути осталось пройти после остановки.

2) $720 \cdot 0{,}25 = 180$ (*км*) осталось пройти после остановки.

3) $14{,}4 \cdot 0{,}25 = 3{,}6$ (*ч*) должен был ехать поезд последнюю четверть пути.

4) $3{,}6 - \frac{4}{15} = 3\frac{1}{3}$ (*ч*) — за столько времени поезд должен пройти последнюю четверть пути, чтобы прийти вовремя.

5) $180 : 3\frac{1}{3} = 54$ (*км/ч*) — с такой скоростью поезд должен продолжать путь.

152. 1) $143 : 20 = 7{,}15$ (*м*).

7,15 *м* = 715 *см* — наименьшее расстояние, на котором следы совпадали один раз.

2) $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$.

Шаг девочки $5 \cdot 11 = 55$ (*см*), а шаг мальчика мог бы быть только или 13 *см*, или $(11 \cdot 13) - 143$ *см*, или $(5 \cdot 13) - 65$ *см* (в противном случае их шаги на расстоянии 7,15 *м* совпадали бы более одного раза). Очевидно, реальной длина шага мальчика может быть только 65 *см*.

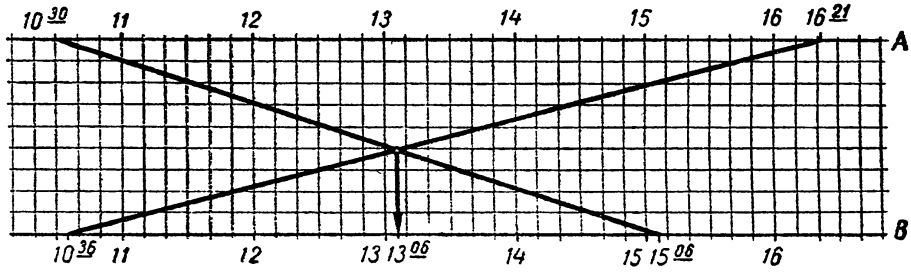


Рис. 8

153. Встреча произошла в 13 *ч* 6 *мин.* (Рис. 8.)

154. 4,8 *ч*.

155. 1,08 *ч*.

156. 1) $1 : 12 = \frac{1}{12}$ цистерны выкачивают оба насоса в одну минуту.

2) $\frac{1}{12} \cdot 4 = \frac{1}{3}$ цистерны выкачивают оба насоса за 4 *мин.*

3) $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ цистерны выкачал второй насос за 24 *мин*.

4) $\frac{2}{3}:24=\frac{1}{36}$ цистерны выкачал второй насос за 1 *мин*.

5) $\frac{1}{12}-\frac{1}{36}=\frac{1}{18}$ цистерны выкачал первый насос за 1 *мин*.

6) $1:\frac{1}{36}=36$ (*мин*) — за столько времени второй насос может выкачать всю нефть в цистерне, работая отдельно.

7) $1:\frac{1}{18}=18$ (*мин*) — за столько времени первый насос может выкачать всю нефть в цистерне, работая отдельно.

157. 12 000 *куб. м.*

158. 22 *мин.*

159. 1) $6{,}75\cdot 22=148{,}5$ (*л*) налилось бы в ванну, если бы все 22 *мин* был открыт кран только с горячей водой.

2) $166-148{,}5=17{,}5$ (*л*) не долили воды.

3) $8{,}5-6{,}75=1{,}75$ (*л*) — на столько больше в одну минуту наливалось воды через кран с холодной водой, чем с горячей.

4) $17{,}5:1{,}75=10$ (*мин*) — работал кран с холодной водой.

5) $22-10=12$ (*мин*) — был открыт кран с горячей водой.

160. 1) $1-0{,}75=0{,}25$ нового остатка составляют 30 страниц (рис. 9).

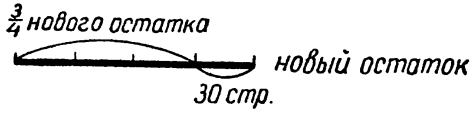


Рис. 9

2) $30:0{,}25=120$ (страниц) — новый остаток.

3) $120+20=140$ (страниц) составляют 0,7 остатка; $1-0{,}3=0{,}7$ (рис. 10).

4) $140:0{,}7=200$ (страниц) — остаток.

5) $200+16=216$ (страниц) составляют 0,8 книги; $1-0{,}2=0{,}8$ (рис. 11).

6) $216 : 0{,}8 = 270$ (страниц) — столько страниц в книге.

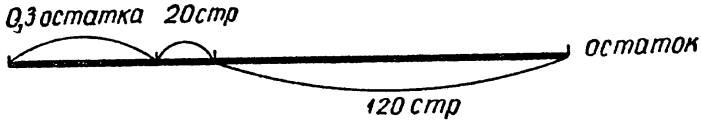


Рис. 10

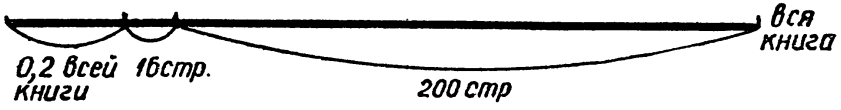


Рис. 11

161. 160 *кг*.

162. 1) $1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$ второго остатка составляют 6 *км*.

2) $6 : \frac{1}{9} = 54$ (*км*) проехали туристы в 3-й день.

3) $54 - 3 = 51$ (*км*) — половина первого остатка.

4) $51 : 0{,}5 = 102$ (*км*) — первый остаток.

5) $102 - 2 = 100$ (*км*) $- \frac{2}{3}$ всего пути $\left(1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\right)$.

6) $100 : \frac{2}{3} = 150$ (*км*) — весь путь.

163. I способ

1) $30{,}3 + 4{,}04 = 34{,}34$ — составило бы полученное число, если бы не отнимали 4,04.

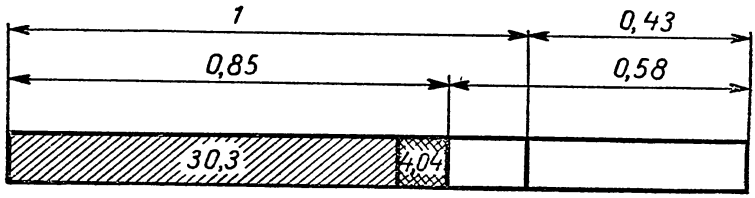


Рис. 12.

2) За 1 примем искомое число $1 + 0{,}43 - 0{,}58 = 0{,}85$ (0,85 задуманного числа составят 34,34).

3) $34{,}34 : 0{,}85 = 40{,}4$ — искомое число.

II способ (рис. 12).

164. 20,2.

165. I способ

1) $37{,}5 \cdot 0{,}8 = 30$ (число больше задуманного в 2,5 раза и еще на 1,75).

2) $30 - 1{,}75 = 28{,}25$ (число больше задуманного в 2,5 раза).

3) $28{,}25 : 2{,}5 = 11{,}3$ — задуманное число.

II способ

$(x \cdot 2{,}5 + 1{,}75) : 0{,}8 = 37{,}5$; $x = 11{,}3$.

166. I способ

1) $700 \cdot 0{,}01 = 7$ — полученная сумма.

2) $7 - 2{,}84 = 4{,}16$ — произведение.

3) $4{,}16 : 0{,}8 = 5{,}2$ — задуманное число без 1,05.

4) $5{,}2 + 1{,}05 = 6{,}25$ — задуманное число.

II способ

$[(x - 1{,}05) \cdot 0{,}8 + 2{,}84] : 0{,}01 = 700$; $x = 6{,}25$.

167. $406 - 66 = 340$ (на столько одно число — делимое — должно быть больше второго, чтобы при делении не было остатка).

Теперь задача сводится к нахождению чисел по следующим данным: одно число больше другого в 3 раза, разность между ними равна 340.

Ответ. Большее число 576, меньшее — 170.

168. 72; 568.

169. За 1 примем количество муки, которое стало во втором ящике, тогда в первом стало $\frac{12}{19}$.

Общее количество муки в двух ящиках не меняется.

1) $1 + \frac{12}{19} = 1\frac{12}{19}$ частей приходится на 155 *кг*.

2) $155 : 1\frac{12}{19} = 95$ (*кг*) стало во втором ящике.

3) $95 - 20 = 75$ (*кг*) было во втором ящике.

4) $155 - 75 = 80$ (*кг*) было в первом ящике.

170. 1) $140 : 2 = 70$ (*кг*) — по столько муки станет в каждом мешке.

2) За 1 примем количество муки, находящееся первоначально в первом мешке.

$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ — такая часть муки осталась в первом мешке, что составляет 70 *кг*.

3) $70 : \frac{7}{8} = 80$ (*кг*) было в первом мешке первоначально.

4) $140 - 80 = 60$ (*кг*) было во втором мешке первоначально.

171. 1) $43 - (5 + 13) = 25$ (коп.) осталось у обоих мальчиков.

2) За 1 часть примем количество оставшихся денег у второго, тогда у первого $\frac{2}{3}$.

$1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$ (частей) приходится на 25 коп.

3) $25 : 1\frac{2}{3} = 15$ (коп.) стало у второго мальчика.

4) $15 + 13 = 28$ (коп.) было у второго первоначально.

5) $43 - 28 = 15$ (коп.) было у первого мальчика первоначально.

172. 1) $24{,}25 - 0{,}6 = 23{,}65$ (*га*) — удвоенная площадь измененного второго участка.

2) $23{,}65 : 2 = 11{,}825$ (*га*) стала площадь второго участка.

3) $11{,}825 - 3{,}5 = 8{,}325$ (*га*) была площадь второго участка.

4) $24{,}25 - 8{,}325 = 15{,}925$ (*га*) — площадь первого участка.

173. 1) $12 - 4 + 2{,}5 = 10{,}5$ (*л*) столько стало в двух бутылях вместе.

2) $10{,}5 - 1{,}25 = 9{,}25$ (*л*) стало бы в двух бутылях, если бы во второй стало столько, сколько стало в первой.

3) $9{,}25 : 2 = 4{,}625$ (*л*) стало в первой бутыли.

4) $4{,}625 + 4 = 8{,}625$ (*л*) было в первой бутыли.

5) $12 - 8{,}625 = 3{,}375$ (*л*) было во второй бутыли.

174. Надо показать учащимся на ряде примеров, что если уменьшаемое и вычитаемое увеличить в несколько раз, то и разность увеличится во столько же раз.

Поэтому, чтобы сравнять остатки бензина в первом и втором баках, надо уменьшаемое (400) и вычитаемое (произведение 20 на число часов) увеличить в 4 раза.

Тогда получим другую задачу: в первом баке было 1600 *л*, а во втором 900 *л*. Из первого отливают каждый час по 80 *л*, из второго — по 10 *л*. Через сколько часов в обоих баках останется бензина поровну?

1) $1600 - 900 = 700$ (*л*) — на столько в первом баке больше, чем во втором.

2) $80 - 10 = 70$ (*л* в час) — на столько каждый час выливают из первого больше, чем из второго.

3) $700 : 70 = 10$ (*ч*) — через столько часов будет выполнено требование как измененной задачи, так и первоначальной.

II способ

Значительно проще объяснение решения задачи, если составить уравнение:

$4(400 - 20x) = 900 - 10x$, где x — искомое число часов. Решение уравнения производится путем использования свойств равенств.

175. 1) От 1 до 9 страницы включительно 9 цифр.

2) $2322 - 9 = 2313$ (цифр) для нумерации всех страниц, кроме первых девяти.

3) От 10 до 99 страницы включительно $2 \cdot 90$, т. е. 180 цифр.

4) $2313 - 180 = 2133$ (цифр) — на нумерацию всех страниц, кроме первых 99.

5) $2133 : 3 = 711$ (стр.) перенумеровали по 3 цифры в каждой.

6) $711 + 99 = 810$ (стр.) в словаре.

176. Для нумерации 9 страниц надо 9 цифр, для нумерации последующих 90 страниц потребуется 180 цифр ($90 \cdot 2 = 180$).

Для нумерации остальных 611 страниц ($710 - 9 - 90 = 611$) надо 1833 цифры ($611 \cdot 3 = 1833$).

Значит, всего для нумерации справочника потребовалось 2022 цифры $\cdot$ ($1833 + 9 + 180 = 2022$).

177. 1) Для написания всех нечетных однозначных чисел понадобилось 5 цифр (1; 3; 5; 7; 9).

2) $104 - 5 = 99$ (цифр) ушло на написание нечетных двузначных и трехзначных чисел.

3) В одном десятке 5 нечетных двузначных чисел, а в девяти десятках 45 нечетных двузначных чисел, для нумерации которых потребовалось 90 цифр.

4) $99 - 90 = 9$ (цифр) ушло на написание нечетных трехзначных чисел, из которых меньшее (нечетное) 101, а большее 105. Отсюда в тетради 106 страниц.

178. 1) $7 \cdot 30 = 210$ (очков) набрал бы ученик, если бы на все вопросы ответил верно.

2) $210 - 77 = 133$ (очка) потерял он за счет нерешенных задач.

3) $7 + 12 = 19$ (очков) — разница между одним верным и одним неверным ответом в очках (или теряет он на каждой нерешенной задаче).

4) $133 : 19 = 7$ (вопросов) было решено неверно.

5) $30 - 7 = 23$ (вопроса) было решено верно.

179. 1) $4{,}4 \cdot 2 = 8{,}8$ (руб.) — разность сумм, собранных в двух случаях.

2) $0{,}8 - 0{,}75 = 0{,}05$ (руб.) — разность на одного человека.

3) $8{,}8 : 0{,}05 = 176$ (чел.).

180. 1) $2{,}8 \cdot 2 = 5{,}6$ (*га*) убрала вторая бригада за 2 дня.

2) $5{,}6 + 0{,}4 = 6$ (*га*) осталось убрать второй бригаде в тот момент, когда первой осталось убрать 4 *га*.

3) $6 - 4 = 2$ (*га*) — на столько в этот момент второй бригаде осталось убрать больше, чем первой.

4) $3{,}2 - 2{,}8 = 0{,}4$ (*га*) — на столько первая бригада собирала в день больше, чем вторая.

5) $2 : 0{,}4 = 5$ (дней) работала первая бригада.

6) $3{,}2 \cdot 5 + 4 = 20$ (*га*) — площадь участка.

181. 150 *кг*.

182. 1) $1{,}6 \cdot 2 = 3{,}2$ (руб.) — на столько денег у сестры больше, чем у брата.

2) $0{,}5 \cdot 2 + 3{,}2 = 4{,}2$ (руб.) — на столько денег у сестры будет больше, если брат отдаст ей свои 0,5 руб.

3) Примем за единицу количество денег, оставшихся у брата, тогда количество денег сестры составит 2,5 таких единиц.

$2{,}5 - 1 = 1{,}5$ (частей) приходится на 4,2 руб.

4) $4{,}2 : 1{,}5 = 2{,}8$ (руб.) стало у брата.

5) $2{,}8 + 0{,}5 = 3{,}3$ (руб.) было у брата.

6) $3{,}3 + 3{,}2 = 6{,}5$ (руб.) было у сестры.

183. 1) $25 \cdot 2 = 50$ (коп.) — на столько у Коли больше денег, чем у Пети (рис. 13).

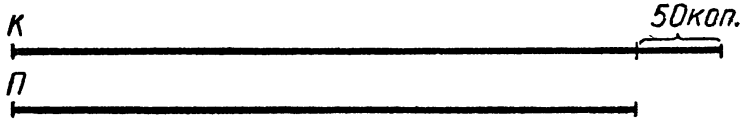


Рис. 13

2) За единицу примем количество денег, оставшихся у Пети после того, как он отдал 1 руб. 40 коп. Коле, тогда деньги Коли составят 2,5 таких единиц (рис. 14).

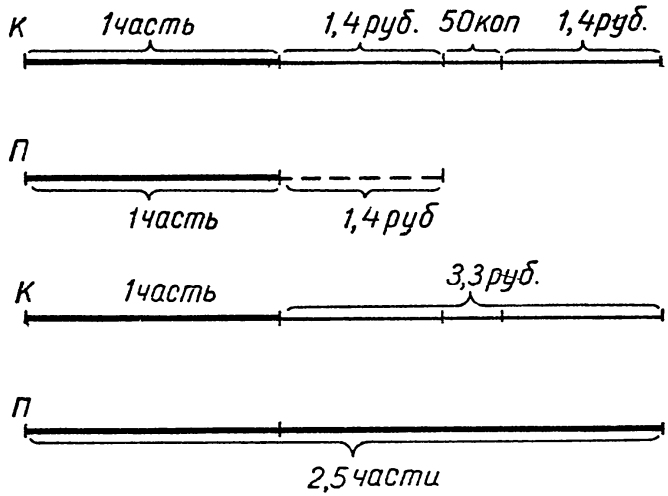


Рис. 14

3) $1{,}4 \cdot 2 + 0{,}5 = 3{,}3$ (руб.) приходится на 1,5 части $(2{,}5 - 1 = 1{,}5)$.

4) $3{,}3 : 1{,}5 = 2{,}2$ (руб.) приходится на 1 часть.

5) $2{,}2 + 1{,}4 = 3{,}6$ (руб.) было у Пети.

6) $3{,}6 + 0{,}5 = 4{,}1$ (руб.) было у Коли.

184. За единицу примем количество молока во втором бидоне, тогда в первом было 3 такие части (рис. 15).

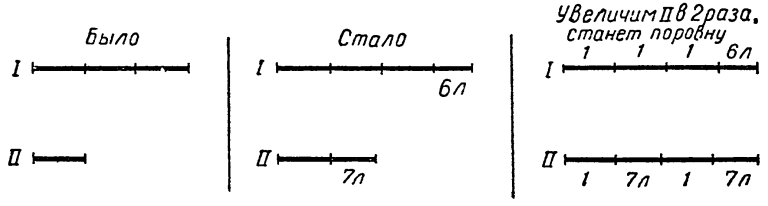


Рис. 15

1) Когда в первый бидон долили 6 *л*, то количество молока в нем составило 3 части и 6 *л*, а когда в другой долили 7 *л*, то количество молока в нем составило 1 часть и 7 *л*.

Если количество молока во втором бидоне увеличить в 2 раза, то молока в обоих бидонах станет поровну, а количество молока второго бидона составит 2 части плюс $7 \cdot 2 = 14$ (*л*).

2) $3 - 2 = 1$ (часть) составляет 8 *л* ($14 - 6 = 8$). Столько молока было во втором бидоне.

3) $8 \cdot 3 = 24$ (*л*) молока было в первом бидоне.

185. I способ

В первой корзине апельсинов больше, чем во второй на 40 штук.

1 часть — стало апельсинов во второй корзине после второго перекладывания, тогда в первой корзине апельсины составят 3 такие части (рис. 16).

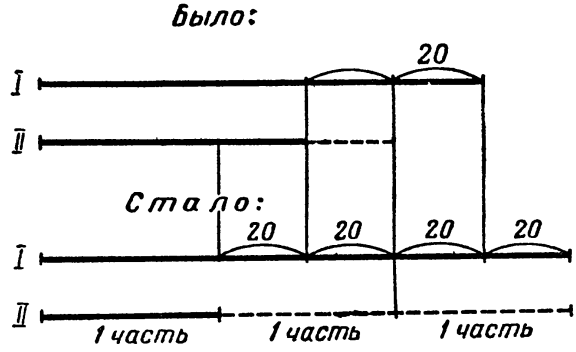


Рис. 16

1 часть + 20 ап. + 20 ап. + 20 ап. + 20 ап. = 3 части, отсюда 2 части составят 80 апельсинов, а одна — 40 апельсинов. Во второй корзине стало 40 апельсинов, а было там $40 + 20 = 60$ (апельсинов). В первой же корзине было $60 + 40 = 100$ (апельсинов).

II способ

Пусть в первой корзине было x апельсинов, тогда во второй $(x - 40)$ апельсинов. Во второй корзине стало $(x - 60)$ апельсинов, а в первой $(x + 20)$ апельсинов, тогда $x + 20 = 3(x - 60)$; отсюда $x = 100$.

186. I способ

Во втором вагоне больше, чем в первом, на 10 человек (рис. 17). За одну часть принимаем число пасса-

жиров первого вагона после того, как оттуда 8 чел. перейдут во второй вагон, тогда число пассажиров второго вагона, после перехода в него 8 чел. из первого, можно принять за 2 части.

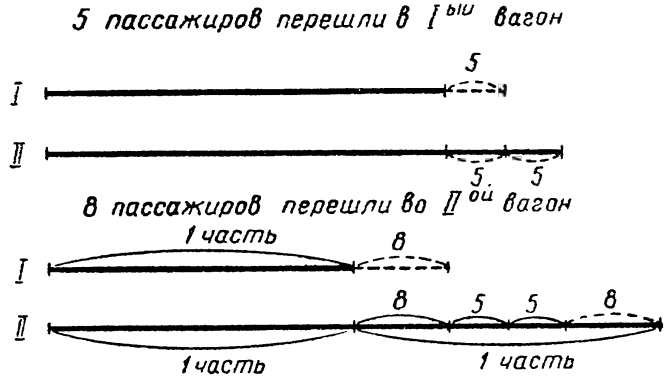


Рис. 17

На 1 часть приходится $10 + 8 + 8 = 26$, т. е. 26 чел., и 52 чел. стало в вагонах, значит, там было $26 + 8 = 34$ и $52 - 8 = 44$.

II способ

Пусть в первом вагоне было x чел., тогда во втором $(x + 10)$ чел. Если из первого 8 пассажиров перейдут во второй, то в первом станет $(x - 8)$ чел., а во втором $(x + 18)$, отсюда уравнение $(x - 8) \cdot 2 = x + 18$, откуда $x = 34$.

187. 11; 21; 20.

188. 1 110 000 и 1 000 011.

189. Однозначных чисел 9, двузначных 90, трехзначных 900. Для записи их надо соответственно 9, 180, 2700 цифр, значит, число, содержащее искомую цифру, будет трехзначным. Для записи всех однозначных и двузначных чисел потребуется 189 цифр $(9 + 180)$, т. е. остается $1001 - 189 = 812$ (цифр); $812 : 3 = 270$ и в остатке 2, значит, искомая цифра стоит на втором месте 271-го трехзначного числа, таким числом является число 370 $(99 + 271)$, а искомой цифрой будет цифра 7.

190. 1) Так как все искомые числа четные и последовательные, то второе число больше первого на 2 (рис. 18), третье больше первого на 4, четвертое больше

первого на 6. $2 + 4 + 6 = 12$ (на столько второе, третье, четвертое числа больше первого).

2) $4052 - 12 = 4040$ — учетверенное меньшее число.

3) $4040 : 4 = 1010$ — меньшее число.

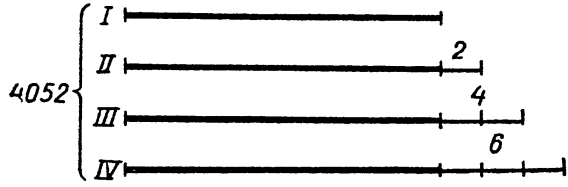


Рис. 18

Искомые числа: 1010; 1012; 1014; 1016.

191. 210; 211; 212; 213; 214; 215.

192. 173; 174; 175; 176; 177.

193. I способ

Сумма всех шести чисел $3 \cdot 6 = 18$, далее решение аналогично решению № 190.

2; 2,4; 2,8; 3,2; 3,6; 4 — искомые числа.

II способ

1) $3 \cdot 2 = 6$ — сумма третьего и четвертого чисел.

2) $6 - 0{,}4 = 5{,}6$ — удвоенное третье число.

3) $5{,}6 : 2 = 2{,}8$ — третье число.

2; 2,4; 2,8; 3,2; 3,6; 4 — искомые числа.

194. I способ. См. решение № 193.

II способ

6,6 — четвертое число.

7,2; 7; 6,8; 6,6; 6,4; 6,2; 6 — искомые числа.

195. $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$.

196. $\frac{2}{7} = \frac{1}{n} + \frac{1}{7n}$; $n = 4$; $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$.

197. Из условия следует, что число единиц (четное) в полтора раза больше числа тысяч, отсюда число единиц должно быть не только четным, но и делящимся на 3, т. е. единиц 6. Искомое число 4126.

198. Уменьшится. Пусть дана дробь $\frac{a}{b}$, причем $a > b$, получим $\frac{a+m}{b+m}$. У этих двух дробей разность числителя

и знаменателя равна $a-b$. Обе дроби неправильные, т. е. большие единицы, первая больше 1 на $\frac{a-b}{b}$, а вторая на $\frac{a-b}{b+m}$. У этих дробей числители равны, а знаменатель второй дроби больше, значит, $\frac{a-b}{b}$ больше $\frac{a-b}{b+m}$, а это и значит, что $\frac{a+m}{b+m}$ меньше $\frac{a}{b}$.

199. Разность знаменателя и числителя данной дроби равна разности знаменателя и числителя полученной дроби. У первой дроби до 1 не хватает столько же долей, сколько и у второй, а доли у второй дроби мельче, значит, вторая дробь ближе к единице. Значит, если к числителю и знаменателю дроби прибавить одно и то же число, то дробь увеличится.

200. К делимому прибавить его половину — это значит увеличить делимое в 1,5 раза.

Из делителя вычесть 0,4 его — это значит делитель будет равен 0,6 прежнего.

Частное увеличится в 2,5 раза (1,5 : 0,6 = 2,5).

201. I способ

1) 0,75 : 0,4 = 1,875 — сумма первого и второго числа.

2) 1,875 · 0,15 = 0,28125 — сумма 0,15 первого и 0,15 второго числа.

II способ

1) $0{,}4 : 0{,}15 = 2\frac{2}{3}$. В $2\frac{2}{3}$ раза первая сумма больше второй.

2) $0{,}75 : 2\frac{2}{3} = 0{,}28125$ — сумма 0,15 первого и 0,15 второго числа.

III способ

$$\frac{0{,}75 \cdot 0{,}15}{0{,}4} = 0{,}28125.$$

202. $\dfrac{\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{5}{12}} = \frac{18}{35}$.

203. Если произведение двух сомножителей — число нечетное, то оба сомножителя нечетные, а сумма двух нечетных чисел — число четное.

204. 1) 23 664 — 22 032 = 1632 — учетверенный первый сомножитель.

2) 1632 : 4 = 408 — первый сомножитель.

3) 23 664 : 408 = 58 — второй сомножитель.

205. 1) 1 часть — делитель, 165 таких частей — делимое, 154 части — полученное делимое.

165 — 154 = 11 (частей) приходится на 143.

2) 143 : 11 = 13 — делитель.

3) 165 · 13 = 2145 — делимое.

206. 1) 194 — 150 = 44 (яблока) — на сколько яблок из второй корзины продали больше, чем из первой корзины.

2) За единицу примем количество яблок, оставшихся во второй корзине, тогда в первой корзине количество

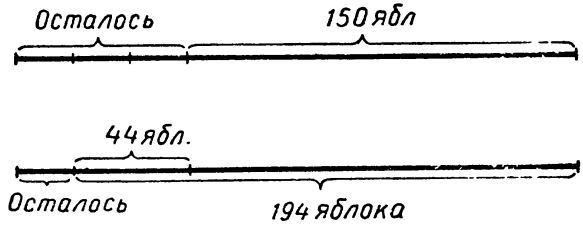


Рис. 19

оставшихся яблок составит 3 единицы, а 44 яблока составят 2 части (3 — 1 = 2).

3) 44 : 2 = 22 (яблока) осталось во второй корзине.

4) 194 + 22 = 216 (яблок) — по стольку яблок было в каждой корзине.

207. I способ

Периметр прямоугольника 18 *см*, значит, сумма двух смежных сторон прямоугольника 9 *см*. Сумма 0,8 одной стороны с 1,25 другой стороны равна тоже 9 *см*, значит, 0,2 одной стороны равны 0,25 другой стороны.

Примем за 1 часть 0,2 одной стороны или 0,25 другой стороны, тогда 1 : 0,2 = 5 (частей) приходится на одну сторону, а 1 : 0,25 = 4 (части) приходится на другую сторону прямоугольника.

9 : (4 + 5) = 1 (*см*) приходится на 1 часть.

1 · 5 = 5 (*см*) и 1 · 4 = 4 (*см*) — стороны прямоугольника, а площадь его 20 *кв. см*.

II способ

Пусть x *см* — одна сторона прямоугольника, тогда $(9-x)$ *см* — другая сторона.

$0{,}8x + 1{,}25(9-x) = 9$; отсюда $x = 5$.

208. 1 — первоначальная цена.

1) $1 + 0{,}2 = 1{,}2$ — цена после повышения.

2) $1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$ — цена после снижения, т. е. яблоки подешевели по сравнению с первоначальной стоимостью на 0,04.

209. За единицу примем $\frac{2}{3}$ числа жителей первого района (рис. 20). Тогда число жителей первого района

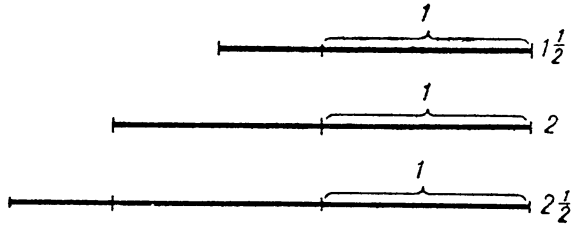


Рис. 20

составляет $1\frac{1}{2}$ части, второго района — 2 части, а третьего района — $2\frac{1}{2}$ части, а число жителей всех трех районов составляет 6 частей $\left(1\frac{1}{2}+2+2\frac{1}{2}\right)$, что равно 12 000 жителей. На одну часть приходится $12\,000 : 6 = 2000$ (жителей). В первом районе $2000 \cdot 1{,}5 = 3000$ (жителей), во втором $2000 \cdot 2 = 4000$ (жителей), а в третьем $2000 \cdot 2{,}5 = 5000$ (жителей).

210. 16 лет; 18 лет; 24 года.

211. 1) $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ (такая часть денег осталась у первого).

2) $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (такая часть денег осталась у второго).

3) Примем за единицу оставшееся количество денег у каждого из учеников (рис. 21), тогда до покупки книг у первого было $2\frac{1}{4}$, а у второго 3 такие же части $\left(1 : \frac{4}{9} = 2\frac{1}{4};\ 1 : \frac{1}{3} = 3\right)$.

4) $3-2\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ части составляют 12 коп.

5) $12:\frac{3}{4}=16$ (коп.) составляют $\frac{1}{3}$ денег второго.

6) $16:\frac{1}{3}=48$ (коп.) было у второго ученика.

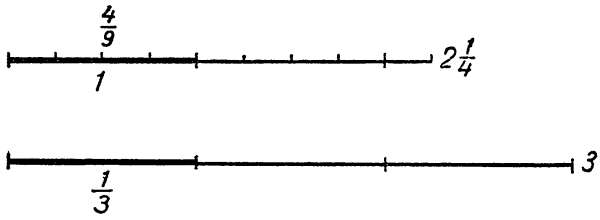


Рис. 21

7) $48-12=36$ (коп.) было у первого ученика.

212. I способ

Пусть путь от Москвы до Тулы 198 *км*, тогда туда поезд весь путь прошел за 2,2 *ч*, обратно за 1,8 *ч*, а в оба конца за 4 *ч*, значит, его средняя скорость $396:4=$ $=99$ (*км/ч*).

II способ

S *км* — путь от Москвы до Тулы, тогда $2S:\left(\frac{S}{110}+\frac{S}{90}\right)$ *км/ч* или $2:\left(\frac{1}{110}+\frac{1}{90}\right)$ *км/ч* — средняя скорость поезда.

213. 1500 *кг*.

214. 1) $\frac{1}{15\cdot 18}$ — такую часть работы по постройке дома может выполнить один рабочий первой бригады в день.

2) $\frac{1}{20\cdot 12}$ — такую часть работы по постройке дома может выполнить один рабочий второй бригады в день.

3) $\frac{3}{15\cdot 18}+\frac{24}{20\cdot 12}=\frac{1}{9}$ — такую часть работы по постройке дома могли бы выполнить трое рабочих первой бригады и 24 рабочих второй бригады.

4) $1:\frac{1}{9}=9$ (дней) — за столько дней 30 рабочих третьей бригады могут построить дом.

5) $\frac{12}{15 \cdot 18} + \frac{16}{20 \cdot 12} + \frac{15}{30 \cdot 9} = \frac{1}{6}$ всей работы по постройке дома могут выполнить в день 12 рабочих первой бригады, 16 рабочих второй бригады и 15 рабочих третьей.

6) $1 : \frac{1}{6} = 6$ (дней) за столько времени был построен дом.

7) $2970 \cdot \frac{6}{15 \cdot 18} = 66$ (руб.) получил каждый рабочий первой бригады.

8) $2970 \cdot \frac{6}{20 \cdot 12} = 74{,}25$ (руб.) получил каждый рабочий второй бригады.

9) $2970 \cdot \frac{6}{30 \cdot 9} = 66$ (руб.) получил каждый рабочий третьей бригады.

215. $11\frac{2}{3}$ дня.

216. 1) $\frac{1}{15} \cdot 9 = \frac{3}{5}$ всего заказа мог выполнить второй рабочий за 9 дней или оба рабочих, если бы у них была одинаковая производительность.

2) $1 - 0{,}6 = 0{,}4$ всего заказа выполнил первый рабочий за счет большей производительности.

3) $\frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{1}{10}$. На 0,1 заказа первый рабочий выполняет в день больше, чем второй.

4) $0{,}4 : 0{,}1 = 4$ (дня) работал первый рабочий.

5) $\frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$ заказа выполнил первый рабочий за 4 дня.

6) $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ заказа выполнил второй рабочий.

7) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ заказа составляют 150 деталей.

8) $150 : \frac{1}{3} = 450$ (деталей) — весь заказ.

217. 42 и 48 страниц.

218. 1) $1 : 12 = \frac{1}{12}$ всего котлована могут выкачать оба насоса за час.

Производительности насосов относятся как 1 : 1,5. Значит, чтобы узнать, сколько из $\frac{1}{12}$ приходится на

первый насос и сколько на второй, надо $\frac{1}{12}$ разделить на две части в отношении 1 : 1,5.

2) $\frac{1}{12} : (1 + 1{,}5) = \frac{1}{30}$ всего котлована выкачивает первый насос за час.

3) $\frac{1}{30} \cdot 1{,}5 = 0{,}05$ всего котлована выкачивает второй насос.

4) $0{,}5 : \frac{1}{30} = 15$ (*ч*) — за столько времени первый насос выкачивает 0,5 котлована.

5) 0,5 : 0,05 = 10 (*ч*) — за столько времени второй насос выкачивает 0,5 котлована.

6) 10 + 15 = 25 (*ч*) — во столько времени была выкачана вода из котлована.

219. 1) 10 *ч* 37 *мин* — 9 *ч* 40 *мин* = 57 *мин* = $\frac{19}{20}$ *ч*. На столько времени задержался в пути велосипедист из-за того, что он встретил знакомого.

2) $3\frac{3}{4} : 8\frac{1}{3} = \frac{9}{20}$ (*ч*) затратил велосипедист на путь в 3,75 *км*, когда поехал опять по направлению к городу.

3) $\frac{19}{20} - \frac{9}{20} = \frac{1}{2}$ (*ч*) — за столько времени велосипедист со знакомым проехали 3,75 *км* по направлению от города.

4) $3{,}75 : \frac{1}{2} = 7{,}5$ (*км/ч*) — такова скорость знакомого.

5) $15 : 8\frac{1}{3} = 1\frac{4}{5}$ (*ч*) — за столько времени проехал велосипедист 15 *км*.

6) 9 *ч* 40 *мин* — 1 *ч* 48 *мин* = 7 *ч* 52 *мин* — во столько времени произошла встреча велосипедиста со знакомым.

7) 15 : 7,5 = 2 (*ч*) — столько времени шел знакомый до встречи.

8) 7 *ч* 52 *мин* — 2 *ч* = 5 *ч* 52 *мин* утра — в такое время выехал знакомый из города.

220. 1) $1 : 4\frac{1}{2} = \frac{2}{9}$ пути проходит пароход против течения за час.

2) $1 : 3 = \frac{1}{3}$ пути проходит пароход по течению за час.

3) $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$ — на такую часть пути пароход по течению проходит больше в час, чем против течения.

4) $\frac{1}{9}:2=\frac{1}{18}$ расстояния между A и B приходится на скорость реки, т. е. такую часть расстояния AB проплывает бочонок за час.

5) $1:\frac{1}{18}=18$ (*ч*) — за столько времени проплывает бочонок это расстояние.

221. 1) $259{,}2:1\frac{2}{7}=201{,}6$ (*км*) прошел бы поезд за это же время с прежней скоростью.

2) $259{,}2-201{,}6=57{,}6$ (*км*) — на столько километров больше прошел на самом деле.

3) $57{,}6:1{,}8=32$ (*км/ч*) — первоначальная скорость.

4) $32\cdot 7\frac{5}{16}=234$ (*км*) прошел поезд за $7\frac{5}{16}$ *ч*.

5) $234+259{,}2=493{,}2$ (*км*) — весь путь.

222. 1) $130{,}75+117{,}75=248{,}5$ (*м*) — сумма длин поездов.

2) $248{,}5:3\frac{7}{45}=78{,}75$ (*м/сек*) — сумма скоростей этих поездов.

3) $248{,}5:28{,}4=8{,}75$ (*м/сек*) — разность скоростей этих поездов.

4) $78{,}75-8{,}75=70$ (*м/сек*) — удвоенная меньшая скорость.

5) $70:2=35$ (*м/сек*) — меньшая скорость.

6) $35+8{,}75=43{,}75$ (*м/сек*) — бóльшая скорость.

223. Скорости парохода обратно пропорциональны времени, затраченному на этот путь.

$$v_1:v_2=\frac{1}{10}:\frac{1}{15}=3:2.$$

1) $3-2=1$ (часть составляет 8 *км*).

2) $8\cdot 3=24$ (*км/ч*) — скорость по течению.

3) $24\cdot 10=240$ (*км*) — расстояние между пристанями.

224. $6:\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{28}\right)=70$ (*км*) — весь путь.

225. 1) 11 *ч* 26 *мин* — 6 *ч* 5 *мин* = 5 *ч* 21 *мин* велосипедист был в пути.

2) 5 *ч* 21 *мин* — 15 *мин* = 5 *ч* 6 *мин* = 5,1 *ч* велосипедист был в движении.

3) Время, затраченное на путь от A до B и от B до A, обратно пропорционально его скоростям на этих участках.

$$t_{AB} : t_{BA} = \frac{1}{18} : \frac{1}{16} = 8 : 9.$$

8 + 9 = 17 (частей) составляют 5,1 *ч*.

4) 5,1 : 17 = 0,3 (*ч*) приходится на 1 часть.

5) 0,3·8 = 2,4 (*ч*) шел от A до B.

6) 18·2,4 = 43,2 (*км*) — расстояние от A до B.

226. Скорости этих двух велосипедистов обратно пропорциональны времени, за которое они прошли одно и то же расстояние.

$$v_1 : v_2 = \frac{1}{5\frac{1}{4}} : \frac{1}{4\frac{2}{3}} = 8 : 9.$$

1) 9 — 8 = 1 (часть) — на такую часть второй приближается к первому за каждый час.

2) $8 \cdot 1\frac{1}{2} = 12$ (частей) — составляют то расстояние, на которое ушел первый велосипедист за $1\frac{1}{2}$ *ч*.

3) 12 : 1 = 12 (*ч*) — через столько времени второй догонит первого.

227. 1) $\frac{5}{6} - \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$ (*ч*) — на столько времени всадник был больше в пути, чем велосипедист.

2) $10 \cdot \frac{3}{4} = 7{,}5$ (*км*) проехал всадник за $\frac{3}{4}$ *ч*.

3) 12 — 10 = 2 (*км/ч*) — на такое расстояние приближался велосипедист к всаднику за час.

4) $7\frac{1}{2} : 2 = 3\frac{3}{4}$ (*ч*) столько времени был в пути велосипедист.

5) $12 \cdot 3\frac{3}{4} = 45$ (*км*) — расстояние между городами.

228. 1) 22,4 : 0,5 = 44,8 (*км/ч*) — сумма скоростей мотоциклистов.

2) 22,4 : 3,5 = 6,4 (*км/ч*) — разность скоростей.

3) 44,8 + 6,4 = 51,2 (*км/ч*) — двойная бóльшая скорость.

4) $51{,}2 : 2 = 25{,}6$ (*км/ч*) — бóльшая скорость.

5) $44{,}8 - 25{,}6 = 19{,}2$ (*км/ч*) — меньшая скорость.

229. 1) $3{,}5 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}75$ (*км*) — такое расстояние до станции не дошел бы колхозник, если бы шел со скоростью 3,5 *км/ч*.

2) $4{,}2 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}4$ (*км*) прошел бы лишних, если бы шел со скоростью 4,2 *км/ч*.

3) $1{,}75 + 1{,}4 = 3{,}15$ (*км*) — разница этих расстояний.

4) $4{,}2 - 3{,}5 = 0{,}7$ (*км/ч*) — разность скоростей.

5) $3{,}15 : 0{,}7 = 4{,}5$ (*ч*) — время, затраченное на путь со скоростью 4,2 *км/ч*.

6) $4{,}5 + 0{,}5 = 5$ (*ч*) шел со скоростью 3,5 *км/ч*.

7) $3{,}5 \cdot 5 = 17{,}5$ (*км*) — расстояние до железнодорожной станции.

230. 1) $13 - 6 = 7$ (*ч*) — время движения пешехода до встречи с велосипедистом.

2) $13 - 10 = 3$ (*ч*) — время движения велосипедиста.

1 — скорость велосипедиста, тогда скорость пешехода 0,28.

3) $0{,}28 \cdot 7 = 1{,}96$ — столько частей составляет расстояние, пройденное пешеходом.

4) $1 \cdot 3 = 3$ (части) приходится на путь, пройденный велосипедистом.

5) $3 + 1{,}96 = 4{,}96$ (части) приходится на 62 *км*.

6) $62 : 4{,}96 = 12{,}5$ (*км/ч*) — скорость велосипедиста.

7) $12{,}5 \cdot 0{,}28 = 3{,}5$ (*км/ч*) — скорость пешехода.

231. 1) 7 *ч* 25 *мин* — 45 *мин* = 6 *ч* 40 *мин* шел первый пароход до встречи со вторым.

2) 7 *ч* 25 *мин* — 3 *ч* 5 *мин* = 4 *ч* 20 *мин* шел второй пароход до встречи с первым.

3) $6 \cdot 4\frac{1}{3} = 26$ (*км*) — на такое расстояние прошел больше второй за счет большей скорости.

4) $301 - 26 = 275$ (*км*) — прошли бы оба парохода вместе за то же время, если бы у них были одинаковые скорости, как у первого.

5) 6 *ч* 40 *мин* + 4 *ч* 20 *мин* = 11 *ч* — за такое время первый пароход мог бы проехать 275 *км*.

6) $275 : 11 = 25$ (*км/ч*) — скорость первого парохода.

7) $25 + 6 = 31$ (*км/ч*) — скорость второго парохода.

8) $25 \cdot 6\frac{2}{3} = 166\frac{2}{3}$ (*км*) — на таком расстоянии от первого порта они встретились.

232. 1 — скорость второго автомобиля, тогда $1\frac{1}{3}$ — скорость первого.

1) $1 : 6 = \frac{1}{6}$ всего расстояния проходили оба автомобиля за час.

2) $1 + 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$ (части) приходится на $\frac{1}{6}$.

3) $\frac{1}{6} : 2\frac{1}{3} = \frac{1}{14}$ всего пути проходит второй автомобиль за час.

4) $\frac{1}{2} : \frac{1}{14} = 7$ (*ч*) — за столько времени проходит второй автомобиль половину пути.

5) $\frac{1}{14} \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{2}{21}$ всего пути проходит первый автомобиль за час.

6) $\frac{1}{2} : \frac{2}{21} = 5\frac{1}{4}$ (*ч*) — за столько времени первый автомобиль проходит половину пути.

$7 - 5{,}25 = 1{,}75$ (*ч*) — на столько часов позже должен выйти первый автомобиль.

233. 1 — намеченная скорость, 1 — весь путь, тогда 1 — намеченное время движения. 1,2 — увеличенная скорость.

1) $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ — оставшаяся часть пути.

2) $\frac{2}{3} : 1\frac{1}{5} = \frac{5}{9}$ — время движения на оставшемся пути.

3) $\frac{1}{3} + \frac{5}{9} = \frac{8}{9}$ — время, которое затратил автомобиль на прохождение данного пути.

4) $1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$ предполагаемого времени составляют 20 *мин*.

В первых четырех действиях величины пути, скорости и времени движения выражаются в условно принятых единицах.

5) $\frac{1}{3} : \frac{1}{9} = 3$ (*ч*) — предполагаемое время.

6) $3-\frac{1}{3}=2\frac{2}{3}$ (*ч*) — столько времени затратил водитель на весь путь.

234. Длина пути в данной задаче может быть произвольная, примем ее за 320 *км*. Тогда первую половину пути машина пройдет за $160:32=5$ (*ч*), а вторую за $5\cdot0{,}8=4$ (*ч*), значит, весь путь — за 9 *ч*. Следовательно, средняя скорость движения $320:9\approx36$ (*км/ч*).

Можно предложить учащимся взять вместо 320 *км* какое-нибудь другое число.

235. 1 — все расстояние.

1) $\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=0{,}025$ всего расстояния составляют 10 *км*.

2) $10:0{,}025=400$ (*км*) — все расстояние.

3) $400:10=40$ (*км/ч*) — скорость поезда.

236. 4,5 *ч*. Задача решается так же, как и задача № 233.

237. 1. **238.** $145\frac{5}{6}$. **239.** 498 425.

240. 4. **241.** 0,0011. **242.** $1\frac{19}{24}$.

243. 1 000 000. **244.** $2\frac{4}{13}$. **245.** 0,615.

246. 1) $100\%-75\%=25\%$ всех жителей не говорят по-русски.

2) $85\%-25\%=60\%$ говорят по-русски и по-грузински.

247. 1) $200\cdot0{,}16=32$ (*кг*) составляет вес воды в 200 *кг* сырого зерна.

2) $32-20=12$ (*кг*) составляет вес оставшейся воды в зерне.

3) $200-20=180$ (*кг*) стало весить зерно.

4) $12:180\approx6{,}7\%$ составляет влажность после просушки.

248. Пусть на второй ферме 1000 коров и удой коровы в среднем 10 *л*. значит, общий удой 10 000 *л*. Тогда на первой ферме 875 коров, средний удой коровы 10,8 *л*, общий удой 9450 *л*. Общий удой на первой ферме составляет $9450:10\,000=0{,}945=94{,}5\%$ удоя второй, т. е. на 5,5% меньше, чем на второй.

Учащимся надо предложить взять за исходные данные и другие числа, чтобы убедиться, что результат получится тот же.

Решение этой задачи, а также задач № 249—252, 255, 263 очень хорошо объясняется, если ввести буквенные обозначения. Тогда, например, решение задачи № 248 будет таким. На второй ферме a коров, средний удой одной коровы b *л*, общий удой ab. На первой ферме 0,875 a коров, средний удой одной коровы 1,08 b *л*, общий удой 0,945 ab *л*. Отношение общего удоя на первой ферме к удою на второй

$$0{,}945\ ab : ab = 0{,}945 = 94{,}5\%.$$

249. 1) 100% + 80% = 180% = 1,8 (объем строительных работ по сравнению с первоначальным).

2) 100% + 20% = 120% = 1,2 — производительность труда по сравнению с первоначальной.

3) 1,8 : 1,2 = 1,5 = 150% — составляет количество рабочих, необходимых теперь по сравнению с первоначальным, т. е. на 50% надо увеличить число рабочих.

250. 1) 1 — 0,2 = 0,8 прежнего времени необходимо теперь для изготовления той же детали.

2) 1 : 0,8 = 1,25 = 125% — такова теперь производительность труда по сравнению с прежней, т. е. производительность труда увеличилась на 25%.

251. 1) 100% — 60% = 40% = 0,4 — такую часть составляет оставшийся приток воды.

2) 1 : 0,4 = 2,5 (раза) — во столько раз увеличится время, необходимое для наполнения бассейна, т. е. увеличится на 150%.

252. Примем для простоты вычислений прежний заработок рабочего за 10 руб., и пусть он покупает только один какой-то продукт по 1 руб. за килограмм, т. е. 10 *кг*. После повышения на 20% заработок рабочего стал 12 руб., а цена продукта после снижения цены на 15% — 0,85 руб. за 1 *кг*. Теперь рабочий может купить уже 12 : 0,85 ≈ 14,1 (*кг*), т. е. на 4,1 : 10 = 0,41 = 41% больше, чем прежде.

253. Площадь измененного прямоугольника составляет 1,05 площади первоначального. Так как длина нового равна 0,84 прежнего, то ширина нового составляет 1,05 : 0,84 = 1,25 ширины прежнего, отсюда первоначально ширина была 3,6 : 0,25 = 14,4 (*см*). Значит, ширина нового прямоугольника 14,4 + 3,6 = 18 (*см*).

254. 9,6 *см*. **255.** Уменьшилась на 1%. **256.** Увеличилась на 44%. **257.** ≈ на 90,1%. **258.** ≈ на 456%.

259. $\approx 12{,}1\%$.

260. 1 — ребро куба, тогда объем куба 1 *куб. ед.*

1) $1 + 0{,}1 = 1{,}1$ — ребро нового куба.

2) $1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}331$ — объем нового куба.

3) $1{,}331 - 1 = 0{,}331$ (*куб. ед.*) — на столько кубических единиц увеличился объем куба.

4) $0{,}331 : 1 = 33{,}1\%$ — на столько процентов увеличился объем куба.

261. 1 — ребро куба; 1,2 — ребро нового куба.

Решение задачи запишем формулой.

$(1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 6) : (1 \cdot 1 \cdot 6) = 1{,}44 = 144\%$, т. е. поверхность куба увеличилась на 44%.

262. Сбор пшеницы с 1 *га* равен частному от деления общего сбора (a) на площадь поля в гектарах (b). Тогда решение задачи можно записать формулой

$$\frac{1{,}26a}{1{,}05b} : \frac{a}{b} = 1{,}2 = 120\%.$$

Значит, урожай пшеницы с 1 *га* в колхозе «Звезда» больше, чем в колхозе «Луч», на 20%. Можно предложить учащимся вместо букв брать произвольные числа (см. решение задачи № 248).

263. 1) $40\% + 36\% = 76\%$ составляют женщины и дети.

2) $100\% - 76\% = 24\%$ составляют мужчины.

3) $24\% + 24\% \cdot \frac{3}{4} = 42\%$ составляют мужчины на вечернем концерте.

4) $40\% - 40\% \cdot \frac{3}{4} = 10\%$ составляют школьники на вечернем концерте.

5) $36\% + 36\% \cdot \frac{3}{8} = 49{,}5\%$ составляют женщины на вечернем концерте.

6) $42\% + 49{,}5\% + 10\% = 101{,}5\%$ от числа посетителей на утреннем концерте составляет число посетителей на вечернем концерте, т. е. на вечернем концерте посетителей было больше, чем на утреннем, на 1,5%.

264. 1) $3{,}5 \cdot 0{,}76 = 2{,}66$ (*кг*) серебра в первом слитке.

2) $10{,}5 \cdot 0{,}84 = 8{,}82$ (*кг*) серебра в 10,5 *кг* сплава.

3) $8{,}82 - 2{,}66 = 6{,}16$ (*кг*) серебра во втором слитке.

4) $10{,}5 - 3{,}5 = 7$ (*кг*) — вес второго слитка.

5) $6{,}16 : 7 = 0{,}88 = 88\%$ серебра содержалось во втором слитке.

265. 1) $5 \cdot 0{,}35 = 1{,}75$ (*л*) жира в 5 *л* сливок.

2) $4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$ (*л*) жира в 4 *л* сливок.

3) $1{,}75 + 0{,}8 = 2{,}55$ (*л*) жира в смеси.

4) $5 + 4 + 1 = 10$ (*л*) — вес смеси.

5) $2{,}55 : 10 = 0{,}255 = 25{,}5\%$ — жирность смеси.

266. 20%. **267.** 10 *кг* и 30 *кг*. **268.** 12 *кг* и 0,4 *кг*.

269. 1) $200 \cdot 0{,}62 = 124$ (*г*) — столько крепкой (100%) серной кислоты содержится в 200 *г* 62-процентной кислоты.

2) $124 : 0{,}08 = 1550$ (*г*) — столько 8-процентной кислоты можно получить из 200 *г* 62-процентной серной кислоты.

270. 500 *г*. **271.** 125 *г*.

272. 1) $7{,}5 \cdot 0{,}64 = 4{,}8$ (*ц*) содержится воды в только что срубленном дереве.

2) $7{,}5 - 4{,}8 = 2{,}7$ (*ц*) содержится сухой древесины в дереве.

3) $100\% - 48\% = 52\%$ веса дерева через неделю составляют 2,7 *ц* сухой древесины.

4) $2{,}7 : 0{,}52 \approx 5{,}2$ (*ц*) весит дерево через неделю.

5) $7{,}5 - 5{,}2 = 2{,}3$ (*ц*) — на столько уменьшился вес дерева за неделю.

273. $\approx 3{,}9$ *т*.

274. 1) $250\% - 100\% = 150\%$ — на столько процентов увеличится продукция.

2) 40 рабочих увеличивают продукцию на 20%.

x рабочих » » на 150%.

3) $x = \frac{40 \cdot 150}{20} = 300$ (рабочих) увеличивают продукцию на 150%, они же составляют 60% числа всех рабочих.

4) $300 : 0{,}6 = 500$ (рабочих) было в цехе.

5) 500 рабочих — увеличение на $y\%$.

300 » » на 150%. $y = 250\%$.

6) $250\% + 100\% = 350\%$, т. е. продукция увеличилась бы в 3,5 раза.

275. Каждые 100 *кг* молока, надоенного за какой-то срок от первой коровы, содержат 5 *кг* (5%) жира.

Каждые 130 *кг* молока, надоенного за тот же срок от второй коровы, содержат 4,55 *кг* жира (130·0,035).

Каждые 100 *кг* молока от первой коровы содержат больше жира, чем 130 *кг* молока от второй коровы на 0,45 *кг* (5 — 4,55).

Чтобы иметь от молока первой коровы жира на 5,4 *кг* больше, чем от молока второй за один и тот же срок, надо иметь (5,4 : 0,45), т. е. 12 удоев молока по 100 *кг*, значит, 1200 *кг*.

275. Входная плата за двух человек была 3 руб., теперь вместо каждых двух человек стадион посещают трое (число посетителей увеличилось на 50%) и платят 3 руб. + 75 коп. = 3 руб. 75 коп. (общий сбор увеличился на 25%), т. е. один билет теперь стоит 1 руб. 25 коп. (3,75 : 3), значит, плата понижена на 25 коп.

277. Первый дядя дал $\frac{1}{4}$ того, что собрали без него, т. е. $\frac{1}{5}$ всех денег (рис. 22).

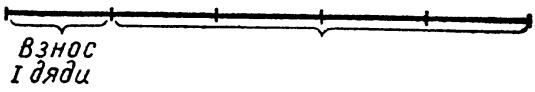


Рис. 22

Второй дядя дал $\frac{1}{3}$ денег, собранных без него, т. е. $\frac{1}{4}$ всех денег (рис. 23).

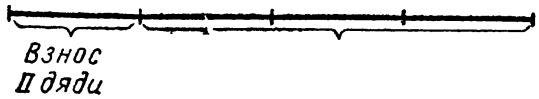


Рис. 23

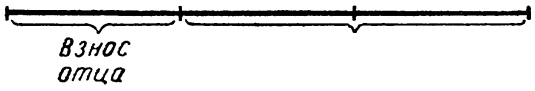


Рис. 24

Отец внес 50% денег, собранных без него, т. е. $\frac{1}{3}$ всех денег (рис. 24).

1) $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{47}{60}$ всех денег дали отец и оба дяди.

2) $1-\frac{47}{60}=\frac{13}{60}$ всех денег составляют 10,4 руб.

3) $10{,}4:\frac{13}{60}=48$ (руб.) стоил радиоприемник.

278. 1) 20% денег старшего и $22\frac{2}{9}\%$ денег младшего составляют 80 руб.

60% денег старшего и $44\frac{4}{9}\%$ младшего составляют 200 руб.

На 2 приемника ушло бы:

40% денег старшего и $44\frac{4}{9}\%$ денег младшего и составили бы 160 руб.

Сравним эту запись с тем, сколько у них ушло на телевизор.

2) $60\%-40\%=20\%$ денег старшего составляют $200-160=40$ (руб.).

3) $40:0{,}2=200$ (руб.) было у старшего.

4) $80-40=40$ (руб.) составляют $22\frac{2}{9}\%$ денег младшего.

5) $22\frac{2}{9}\%=\frac{200}{9\cdot 100}=\frac{2}{9}$; $40:\frac{2}{9}=180$ (руб.) было у младшего брата.

279. 62,5% возраста брата больше 75% возраста сестры на 2 года. 50% возраста брата больше 37,5% возраста сестры на 7 лет, значит, 100% возраста брата больше 75% возраста сестры на 14 лет, отсюда 37,5% возраста брата составляют 12 лет.

$12:0{,}375=32$ (года) брату.

$32-14=18$ (лет) составляют 75% возраста сестры.

$18:0{,}75=24$ (года) сестре.

280. Пусть второе слагаемое 1, тогда первое слагаемое $\frac{5}{12}$, а сумма $1\frac{5}{12}$.

$\frac{5}{12}$ от $1\frac{5}{12}$ составляют $\frac{5}{17}\approx 0{,}294=29{,}4\%$.

Следовательно, меньшее слагаемое составляет $\approx 29{,}4\%$ от суммы.

281. Пусть уменьшаемое 1, тогда вычитаемое $\frac{7}{13}$, а разность $\frac{6}{13}\left(1-\frac{7}{13}=\frac{6}{13}\right)$.

$\frac{6}{13}$ от $\frac{7}{13}$ составляет $\frac{6}{7}\approx 85{,}7\%$.

282. 1) $12 : 960 = \frac{1}{80}$ часть резца расходует один рабочий на изготовление одной детали.

2) $10 : 640 = \frac{1}{64}$ части резца расходует второй рабочий на изготовление одной детали.

3) $\frac{1}{80} : \frac{1}{64} = 0{,}8 = 80\%$, т. е. первый рабочий расходовал резцы на 20% экономнее, чем второй.

283. I : II = 5 : 4;

II : III = 2 : 1,5 = 4 : 3; отсюда I : II : III = 5 : 4 : 3.

1) $5 + 5 \cdot \frac{1}{10} = 5\frac{1}{2}$ частей составляет новая ежедневная нормы I бригады.

2) $4 + 4 \cdot \frac{1}{5} = 4\frac{4}{5}$ части приходится ежедневно на новую норму II бригады.

3) $3 + 3 \cdot \frac{1}{10} = 3\frac{3}{10}$ части ежедневной нормы III бригады.

Теперь $I : II : III = 5\frac{1}{2} : 4\frac{4}{5} : 3\frac{3}{10} = 55 : 48 : 33$.

4) 55 − 48 = 7 (частей) составляют 14 *га*.

5) $\frac{14 \cdot 55}{7} = 110$ (*га*) вспахала первая бригада.

6) $\frac{14 \cdot 48}{7} = 96$ (*га*) вспахала вторая бригада.

7) $\frac{14 \cdot 33}{7} = 66$ (*га*) вспахала третья бригада.

284. II : III : IV = 6,5 : 7,8 : 9,1 = 5 : 6 : 7.

1) $26\% \cdot 1\frac{1}{4} = 32{,}5\%$ годового плана дал завод во втором квартале.

2) 32,5% : 5 = 6,5% приходится на 1 часть.

3) 6,5% · 6 = 39% дал завод в третьем квартале.

4) 6,5% · 7 = 45,5% дал завод в четвертом квартале.

5) 26% + 32,5% + 39% + 45,5% = 143% годового плана фактически выполнил завод, т. е. перевыполнил план на 43%.

285. I способ

1) $\frac{3}{16} : \frac{5}{32} = 1\frac{1}{5}$ — во столько раз первое число больше второго. 1 — второе число.

2) $1\frac{1}{5} - 1 = \frac{1}{5}$ второго числа составляет 16.

3) $16 : \frac{1}{5} = 80$ — второе число.

4) $80 \cdot 1\frac{1}{5} = 96$ — первое число.

II способ

Пусть x — первое число, y — второе.

$\frac{5}{32} \cdot x = \frac{3}{16} \cdot y$, т. е. можно считать, что это написано равенство произведений крайних и средних членов пропорции, отсюда $x : y = \frac{3}{16} : \frac{5}{32} = 6 : 5$.

$$x = \frac{16 \cdot 6}{6-5} = 96; \quad y = \frac{16 \cdot 5}{6-5} = 80.$$

286. I и II способы см. № 285.

III способ

Обозначить через единицу $\frac{5}{8}$ первого числа, тогда первое число будет равно $1\frac{3}{5}$, а второе $1\frac{1}{3}$.

1) $1\frac{3}{5} - 1\frac{1}{3} = \frac{4}{15}$ (составляют 12).

2) $12 : \frac{4}{15} = 45$ (составляет 1 часть).

3) $45 \cdot 1\frac{3}{5} = 72$ — первое число.

4) $45 \cdot 1\frac{1}{3} = 60$ — второе число.

287. 88 и 84.

288. Первое число меньше второго в 2 раза ($8 : 4 = 2$), т. е. первое число составляет $\frac{1}{2}$ второго.

Третье число меньше второго в $1\frac{1}{2}$ раза $\left(6 : 4 = \frac{3}{2}\right)$, т. е. третье число составляет $\frac{2}{3}$ второго. Значит, числа находятся в отношении $I : II : III = \frac{1}{2} : 1 : \frac{2}{3} = 3 : 6 : 4$.

1) $\frac{136{,}5 \cdot 3}{3+6+4} = 31{,}5$ — первое число.

2) $31{,}5 \cdot 2 = 63$ — второе число.

3) $63 \cdot \frac{2}{3} = 42$ — третье число.

289. 6; 4,8 и 7,2.

290. 1 — меньшее число; 10,5 — большее число.

1) $1 + 10{,}5 = 11{,}5$ (части) приходится на сумму чисел, т. е. на 10,5.

2) $10{,}5 : 11{,}5 = \frac{21}{23}$ — меньшее число.

3) $\frac{21}{23} \cdot 10{,}5 = \frac{441}{46}$ — большее число.

291. $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{56}$.

292. Искомые числа: 0,252; 2,52; 252.

x — меньшее число, тогда $x + 10x + 1000x = 254{,}772$; $x = 0{,}252$.

293. 35,12; 351,2; 3512.

294. 29 коп.

295. I способ (см. замечание к № 174).

1) $48 \cdot 3 = 144$ (*км*) должен пройти письмоносец, чтобы остаток его пути был таким же, как у колхозника.

2) $13 \cdot 3 = 39$ (*км*) должен проезжать письмоносец в час, чтобы остаток его пути был таким же, как у колхозника.

3) $39 - 7 = 32$ (*км*). На 32 *км* проезжал бы письмоносец в час больше колхозника.

4) $144 - 48 = 96$ (*км*). На 96 *км* больше проехал бы письмоносец, чем колхозник.

5) $96 : 32 = 3$ (*ч*). Через 3 *ч* остаток пути для колхозника будет в 3 раза больше, чем для письмоносца.

II способ

За 1 примем часть пути, которую осталось пройти почтальону, тогда колхознику осталось 3.

1) $3 - 1 = 2$ части составляют путь, на который отстал колхозник.

2) $13 - 7 = 6$ (*км/ч*) — из-за этих 6 *км/ч* колхозник отстал на 2 части.

3) $6 : 2 = 3$ (*км/ч*) дают отставание в 1 часть.

4) $13 + 3 = 16$ (*км/ч*) — если бы велосипедист шел с этой скоростью, он за то же время прошел бы все 48 *км*.

5) $48 : 16 = 3$ (*ч*) — через столько времени остаток пути почтальона будет в 3 раза меньше остатка пути колхозника.

296. $2{,}36 \cdot 50{,}4$. **297.** $40{,}5 \cdot 2{,}07$.

298.
$$\begin{array}{r|l} -\,97760 & 325 \\ \underline{975} & \overline{300{,}8} \\ -\,2600 & \\ \underline{2600} & \\ 0 & \end{array}$$

299. I способ

1) $25 - 15 = 10$ (*л*) — на столько из первого сосуда вытекает больше, чем из второго за 1 *мин*.

2) 1 — остаток в первом сосуде.

6 — остаток во втором сосуде.

$6 - 1 = 5$ — разница остатков.

3) $10 : 5 = 2$ (*л*), если бы на 2 *л* больше вытекало из первого сосуда, то там ничего не осталось бы.

4) $25 + 2 = 27$ (*л*) — по стольку надо выливать из первого сосуда в минуту, чтобы за это же время там ничего не осталось.

5) $540 : 27 = 20$ (*мин*) — через столько времени в первом сосуде останется в 6 раз меньше, чем во втором.

II способ (см. замечание к задаче 174).

1) $540 \cdot 6 = 3240$ (*л*) — столько должно было быть в первом сосуде, чтобы через столько же времени в обоих сосудах осталось поровну.

2) $25 \cdot 6 = 150$ (*л*) — по стольку надо было бы для этого выливать каждую минуту из первого сосуда.

3) $3240 - 540 = 2700$ (*л*) — на столько во втором сосуде меньше, чем в предполагаемом первом сосуде.

4) $150 - 15 = 135$ (*л*) — на столько из второго сосуда выливали бы меньше, чем из первого.

5) $2700 : 135 = 20$ (*мин*) — через столько времени в первом останется в 6 раз меньше, чем во втором.

III способ — графический. (См. стр. 15 книги Островского и Кордемского «Геометрия помогает арифметике».)

300. Указание. Делитель умножим на 10, значит, чтобы частное не уменьшилось, надо делимое тоже увеличить в 10 раз, а его увеличили на 10 и частное не уменьшилось.

Если первоначальное делимое принять за 1 часть, то увеличенное делимое будет содержать 10 частей, т. е.

к делимому добавлено 9 частей. Эти 9 частей составляют 10, значит, 1 часть, а следовательно, и первоначальное делимое равно $\frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$. Делитель может быть любым, не равным 0.

Очень легко решение объясняется уравнением: $\frac{x}{a} = \frac{x+10}{10a}$, где x — первоначальное делимое, a — произвольный делитель (не равный 0).

301. В первой сотне таких чисел не может быть, так как здесь в каждом десятке не менее чем по два простых числа. В первом десятке второй сотни тоже несколько простых чисел. А вот во втором десятке второй сотни есть такое число 114, следующие за ним 12 чисел: 115; 116; 117; 118; 119; 120; 121; 122; 123; 124; 125; 126 — составные.

302. $150 \cdot \frac{7}{30} = 35$ — целая часть искомого смешанного числа.

$2 \cdot \frac{7}{30} = \frac{7}{15}$ — дробь искомого числа.

$35\frac{7}{15}$ — искомое число.

303. $11\frac{11}{40}$. **304.** $32\frac{8}{15}$.

305. $\frac{2323}{9999} = \frac{23}{99}$; $\frac{232323}{999999} = \frac{23}{99}$, следовательно, все эти дроби равны между собой.

306. $\frac{30}{42}$. Задача сводится к делению 72 в отношении 5:7.

307. Дробь $\frac{a}{b}$, известно, что $ab = 550$.

$$550 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11.$$

Так как дробь должна быть выражена конечной десятичной, то число 11 не может быть множителем знаменателя, т. е. дроби могут быть

$$\frac{11}{5 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{11}{50} = 0{,}22; \quad \frac{11 \cdot 2}{5 \cdot 5} = \frac{22}{25} = 0{,}88;$$

$$\frac{11 \cdot 5 \cdot 5}{2} = \frac{275}{2} = 137{,}5.$$

308[1] 1) $\overline{5abcde}$ больше $\overline{abcde5}$ в 4 раза, значит, $4 \cdot 5 = 20$; $e = 0$.

2) $\overline{5abcd0}$ больше $\overline{abcd05}$ в 4 раза, значит, $\overline{abcd05} \cdot 4 = \overline{5abcd0}$; $d = 2$.

3) $\overline{abc205} \cdot 4 = \overline{5abc20}$;

$$205 \cdot 4 = 820; \quad c = 8.$$

4) $\overline{ab8205} \cdot 4 = \overline{5ab820}$;

$$8205 \cdot 4 = 32820; \quad b = 2.$$

5) $\overline{a28205} \cdot 4 = \overline{5a2820}$;

$$28\,205 \cdot 4 = 112\,820; \quad a = 1.$$

Первоначальное число 512 820.

309. 857 142 — искомое число.

310. Часовая стрелка за минуту делает $\frac{1}{60 \cdot 12}$ оборота, минутная стрелка за минуту — $\frac{1}{60}$ оборота.

За минуту минутная стрелка делает на $\frac{1}{12 \cdot 60}$ оборота больше часовой

$$\left(\frac{1}{60} - \frac{1}{12 \cdot 60} = \frac{11}{60 \cdot 12}\right),$$

а до следующего совпадения стрелок минутная стрелка сделает на целый круг больше, значит, минутная стрелка догонит часовую через $1 : \frac{11}{720} = 65\frac{5}{11}$ (*мин*).

311. Если первоначально товар стоил 1, то после повышения цены на 10% товар стоит 1,1 первоначальной цены. После удешевления на 10% товар стал стоить $1{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}99$, т. е. дешевле первоначальной стоимости на 1%.

312. Если к задуманному числу прибавить 12, а затем отнять 5, то полученное число будет больше задуманного на 7, значит, и задуманное число делится на 7.

Если к задуманному числу прибавить 14, а потом отнять 5, то полученное число будет больше искомого на 9,

---

[1] $\overline{5abcde}$ — шестизначное число, записанное в десятичной системе счисления, где e — число единиц, d — число десятков, c — число сотен и т. д.

известно, что оно делится на 9, значит, и искомое число делится на 9.

Если к задуманному числу прибавить 18, а затем отнять 5, то получим число, большее задуманного на 13, а так как оно делится на 13, то и задуманное число делится на 13.

Значит, наименьшее из чисел, удовлетворяющее условию $7 \cdot 9 \cdot 13 = 819$, — искомое трехзначное число (819 — единственное число, так как все остальные числа, кратные 819, уже не трехзначные).

313. Если от задуманного числа отнять 4, то оно разделится на 11, на 8 и на 7. Задуманное число $11 \cdot 8 \cdot 7 + 4 = 620$. Другого числа быть не может, так как произведение 616 на любое целое число не будет числом трехзначным.

314. Сначала положим на каждую чашку весов по 3 монеты. При этом может быть два случая: или они будут в равновесии (значит, фальшивая монета находится среди оставшихся двух, обнаружить ее легко, положив на чашки весов по одной из этих монет), или же в равновесии монеты не будут, тогда фальшивая монета среди трех монет, вес которых меньше. Положив из этих трех две на чашки весов, получим или равновесие, тогда фальшивая — оставшаяся третья, или неравновесие — тогда фальшивая монета та, что легче.

315. 1) $270 + 290 = 560$ (шагов) сделали оба, пройдя весь периметр огорода.

2) Количество шагов брата ($Б$) и сестры ($С$) на одном и том же расстоянии обратно пропорционально длине шагов:

$$Б : С = \frac{1}{0{,}8} : \frac{1}{0{,}6} = 3 : 4.$$

3) $\frac{560 \cdot 4}{3+4} = 320$ (шагов) сделала девочка, пройдя длину и ширину огорода.

4) $\frac{560 \cdot 3}{3+4} = 240$ (шагов) сделал мальчик, пройдя длину и ширину огорода.

5) $0{,}6 \cdot 320 = 192$ ($м$) длина и ширина огорода вместе.

6) $0{,}6 \cdot 270 = 162$ ($м$) прошла девочка, если бы прошла 270 шагов одна.

7) $192 - 162 = 30$ (*м*) прошел мальчик лишних за счет более длинного шага.

8) $0{,}8 - 0{,}6 = 0{,}2$ (*м*) — на столько шаг мальчика длиннее шага девочки.

9) $30 : 0{,}2 = 150$ (шагов) сделал мальчик в первый раз.

10) $0{,}8 \cdot 150 = 120$ (*м*) — длина прямоугольника.

11) $192 - 120 = 72$ (*м*) — ширина прямоугольника.

12) $120 \cdot 72 = 8640$ (*кв. м*) — площадь прямоугольника.

316. 1) $12 : 2 = 6$ (стр.) — по стольку страниц должна была печатать первая машинистка, чтобы напечатать столько же, сколько и вторая.

2) $6 \cdot 4 = 24$ (стр.) напечатала бы первая машинистка за 4 *ч*.

3) $10 - 6 = 4$ (стр.) — на столько вторая машинистка в час печатает больше, чем первая по предположению.

4) $24 : 4 = 6$ (*ч*) работала вторая машинистка.

5) $6 + 4 = 10$ (*ч*) работала первая машинистка.

6) $10 \cdot 6 = 60$ (стр.) напечатала вторая машинистка.

7) $12 \cdot 10 = 120$ (стр.) напечатала первая машинистка.

8) $120 + 60 = 180$ (стр.) — такова вся рукопись.

317. Пусть количество страниц таблиц составляет 1, тогда количество страниц текста составит 2,5. Если страница текста, оплачивалась 1, то страница таблиц оплачивалась на $\frac{2}{3}$ больше, т. е. $1\frac{2}{3}$.

1) $1\frac{2}{3} \cdot 1 = 1\frac{2}{3}$ составляет стоимость всех таблиц.

2) $1 \cdot 2{,}5 = 2{,}5$ составляет стоимость всех страниц текста.

3) 25 руб. надо разделить между машинистками в отношении

$$\text{I} : \text{II} = 1\frac{2}{3} : 2{,}5 = 2 : 3.$$

$\frac{25 \cdot 2}{2+3} = 10$ (руб.) получила машинистка за таблицы.

$\frac{25 \cdot 3}{2+3} = 15$ (руб.) получила машинистка за текст.

318. 1) $0{,}35 \cdot 20 = 7$ (руб.) — на столько больше стоили бы книги по физике, чем по математике, если бы их было столько же, сколько и по математике.

2) $0{,}63 - 0{,}35 = 0{,}28$ (руб.) — на столько одна книга по физике стоила больше, чем книга по математике.

3) $7 : 0{,}28 = 25$ (книг) было по физике.

4) $20 + 25 = 45$ (книг) было по математике.

319. 1) $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ приходится на 13 *м*.

2) $13 : \frac{2}{3} = 19{,}5$ (*м*) продали в 4-й день.

3) $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

4) $19{,}5 + 9 = 28{,}5$ (*м*) $- \frac{3}{4}$ нового остатка.

5) $28{,}5 : \frac{3}{4} = 38$ (*м*) — новый остаток.

6) $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

7) $38 + 10 = 48$ (*м*) $- \frac{4}{5}$ остатка.

8) $48 : \frac{4}{5} = 60$ (*м*) — остаток.

9) $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

10) $60 + 5 = 65$ (*м*) $- \frac{5}{6}$ всего куска.

11) $65 : \frac{5}{6} = 78$ (*м*) было во всем куске.

320. 720 *кг*. **321.** 15 кур и 4 овцы.

322. 1) $2 \cdot 2 = 4$ (*кв. м*) — площадь квадрата (рис. **25**).

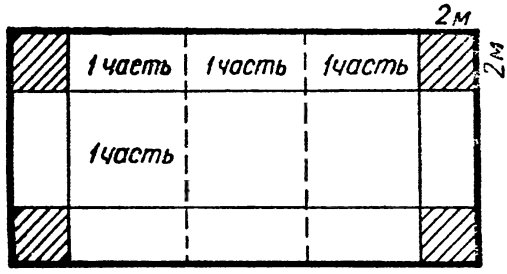


Рис. 25

2) $4 \cdot 4 = 16$ (*кв. м*) — площадь четырех квадратов.

3) $128 - 16 = 112$ (*кв. м*) — площадь оставшейся части или площадь восьми равных участков шириной **2** *м*, а длиной в 1 часть.

4) $112:8=14$ (*кв. м*) — площадь одного такого участка.

5) $14:2=7$ (*м*) — длина одного такого участка или такова ширина данного участка.

6) $7\cdot3=21$ (*м*) — длина данного участка.

7) $7+2+2=11$ (*м*) — длина меньшей стороны ограды.

8) $21+2+2=25$ (*м*) — длина большей стороны ограды.

9) $(11+25)\cdot2=72$ (*м*) — длина всей ограды.

323. I способ

1) $2\cdot10=20$ (коп.) было бы в кошельке, если бы все монеты были по 2 коп.

2) $26-20=6$ (коп). На 6 коп. на самом деле больше, чем мы предположили.

3) $3-2=1$ (коп.) разница в стоимости одной монеты.

4) $6:1=6$ (монет) по 3 коп.

5) $10-6=4$ (монеты) по 2 коп.

II способ

Пусть двухкопеечных монет было x шт., тогда трехкопеечных монет было $(10-x)$ шт., отсюда $2x+3(10-x)=26$, $x=4$.

324. I способ

1) $24\cdot46=1104$ (коп.) стоили бы все 46 книг, если бы каждая стоила 24 коп.

2) $14{,}64-11{,}04=3{,}6$ (руб.) На 3 руб. 60 коп. стоят дороже книги, чем 46 книг по 24 коп.

3) $42-24=18$ (коп.). На 18 коп. один учебник стоит дороже, чем один задачник.

4) $360:18=20$ (шт.) было учебников.

5) $46-20=26$ (шт.) было задачников.

II способ

Пусть было x учебников, тогда $(46-x)$ задачников, $0{,}42x+(46-x)\cdot0{,}24=14{,}64$;

$x=20$.

325. 1) $5{,}5\cdot70=385$ (руб.) стоила бы вся ткань, если бы один метр стоил 5,5 руб.

2) $425-385=40$ (руб.) — на столько дороже оба куска ткани на самом деле.

3) $6{,}5 - 5{,}5 = 1$ (руб.) — разница в цене одного метра.

4) $40 : 1 = 40$ (*м*) было ткани по 6 руб. 50 коп.

5) $70 - 40 = 30$ (*м*) было ткани по 5 руб. 50 коп.

326. I способ

1) $3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$ (руб.) стоят 3 *м* первого сорта.

2) $4{,}5 + 7{,}5 = 12$ (руб.). На 12 руб. дороже второй сорт, чем первый.

3) $4{,}5 - 3 = 1{,}5$ (руб.). На 1,5 руб. дороже 1 *м* второго сорта, чем 1 *м* первого сорта.

4) $12 : 1{,}5 = 8$ (*м*) второго сорта.

5) $8 + 1{,}5 = 9{,}5$ (*м*) первого сорта.

6) $3 \cdot 9{,}5 = 28{,}5$ (руб.) стоит первый сорт.

7) $4{,}5 \cdot 8 = 36$ (руб.) стоит второй сорт.

II способ

Пусть будет во втором куске x *м*, тогда $(x + 1{,}5)$ *м* в первом куске. Составим уравнение: $3(x + 1{,}5) + 7{,}5 = 4{,}5x$; получим: $x = 8$.

327. 8 чисел (5, 15, 35, 45, 55, 65, 85, 95) при умножении на четное число дают числа, оканчивающиеся одним нулем, а произведение этих 8-ми чисел и 8 четных чисел оканчивается восьмью нулями.

Три числа (25, 75 и 50) при умножении на число, делящееся на 4, дают числа, оканчивающиеся на два нуля, а их произведение оканчивается шестью нулями.

Числа 10, 20, 30, 40, 60, 70, 80, 90, 100 при умножении на любое число, кроме уже рассмотренных, дают на конце столько нулей, сколько их в указанном сомножителе, а их произведение оканчивается 10 нулями.

Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$ оканчивается на 24 нуля.

328. 5, так как произведение любого нечетного числа на 5 дает число, оканчивающееся на 5.

329. Через $3\frac{1}{3}$ дня.

330. I способ

Первый путник половину времени, затраченного на весь переход, шел по 5 *км/ч*, поэтому он прошел больше половины пути, а второй с этой скоростью прошел только половину пути, поэтому первый пришел в B раньше, чем второй.

II способ

Пусть S *км* — путь от A до B.

Первый путник затратил на весь путь t *ч*, значит,

$$5 \cdot \frac{t}{2} + 4 \cdot \frac{t}{2} = S;\ 4{,}5t = S;\ t = \frac{S}{4{,}5},\ \text{т. е. } t = \frac{2S}{9}\ ч.$$

Второй же путник был в пути $\frac{S}{2} :\ 4 + \frac{S}{2} :\ 5 = \frac{9S}{40}$ (*ч*); $\frac{2S}{9}$ *ч* меньше $\frac{9S}{40}$ *ч*, значит, первый прибыл в B раньше.

331. I способ

За время, которое автомобилист потратил на вторую половину пути, велосипедист проезжает весь путь от A до B. Значит, велосипедист прибыл в B раньше, чем автомобилист.

II способ

Велосипедист на путь от A до B, равный S *км*, идя со скоростью V *км/ч*, затратил $\frac{S}{V}$ *ч*.

Автомобиль на первую половину пути затратил $\frac{S}{2 \cdot 5V} = \frac{S}{10V}$ (*ч*), а на вторую $\frac{S}{2} : \frac{V}{2} = \frac{S}{V}$ (*ч*), т. е. столько, сколько велосипедист затратил на весь путь, значит, велосипедист прибыл в B раньше автомобилиста.

332. Так как $m^2 - n = 16 - 16 = 0$, а знаменатель не равен нулю, то дробь равна нулю.

333. 0. **334.** 6 249 975 при $a = -10$; $b = -5$.

335. —3; 0,5; 11. **336.** 10 590 580 при $x = -10$; $y = 23$.

338. —11,1. **339.** —21,84.

340. 1) 0; 2) при $x = 0{,}1$ выражение теряет смысл, так как деление на нуль невозможно.

341. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) при $a = -\frac{1}{3}$ выражение теряет смысл.

342. 1) $\frac{1}{4}$; 2) при $a = -2$ выражение теряет смысл.

343. 1) —18 при $x = -10$; 2) при $x = 0{,}5$ выражение теряет смысл.

344. 2 больше девятой части куба утроенной суммы чисел a и b на 5.

345. При $a = -10$ и $x = -99$ удвоенная разность квадратов чисел a и x больше утроенной разности квадратов этих же чисел на 9701.

346. $\frac{a^4+b^4}{2} > \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$ во всех трех случаях.

347. При $a=-18$ $x=-11$; $\left(\frac{a+x}{2}\right)^3$ больше $\frac{a^3+x^3}{2}$ на 532,875.

348. $\frac{1648}{1751}=\frac{16}{17}$; $\frac{131313}{686868}=\frac{13}{68}$; $\left(\frac{16}{17}+\frac{13}{68}\right)\cdot\left(\frac{13}{68}-\frac{16}{17}\right)=$

$=\frac{1}{17}\left(16+\frac{13}{4}\right)\cdot\frac{1}{17}\left(\frac{13}{4}-16\right)=\frac{1}{17^2}\left(\frac{169}{16}-256\right)=-\frac{231}{272}$.

349. $\frac{1284}{1391}=\frac{12}{13}$; $\frac{212121}{656565}=\frac{21}{65}$. $\left(\frac{12}{13}+\frac{21}{65}\right)\times$

$\times\left(\frac{21}{65}-\frac{12}{13}\right)=-\frac{243}{325}$.

350. а) 6; б) 7; в) 1; г) 3; д) 0; е) 2, или 4, или 6, или 8; ж) 3 или 7; з) 4; и) 5.

351. а) 8; б) 57; в) 330; г) 315. **352.** 0,2. **353.** —0,2.

354. Так как число делится без остатка на 5, то оно может быть записано или $10a+0$, или $10a+5$, где a — натуральное число. Но $(10a+0)\cdot 0=0$, следовательно, $(10a+5)\cdot 5=363+a+5$, отсюда $a=7$, поэтому искомое число 75.

355. $12a+1$, где a — любое натуральное число.

356. $24a+5$, где a — любое натуральное число.

357. Пусть $2a+1$ и $2a+3$ — последовательные нечетные числа, где a — нуль или любое натуральное число.

$(2a+1)+(2a+3)=4a+4=4(a+1)$, один из сомножителей делится на 4, значит, и все произведение делится на 4.

358. $(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n$, где n — натуральное число. Один из сомножителей 8, значит, $8n$ делится на 8.

359. $(2n+1)^2-1=4n(n+1)$; $n(n+1)$ — произведение двух последовательных натуральных чисел, из них одно — или n, или $n+1$ делится на 2, значит, $4n(n+1)$ делится на 8.

360. $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6=$

$=2(2n+3)$.

$2(2n+3)$ во всяком случае делится на 2, т. е. $2(2n+3)$ не простое число.

361. Из трех последовательных натуральных чисел по крайней мере одно кратно 2 и одно кратно 3, значит, произведение кратно 6. Пусть первое число четное $2n$,

тогда произведение трех последовательных чисел будет: $2n(2n+1)(2n+2)$.

Один из сомножителей по-прежнему делится на 3. Представим произведение следующим образом: $2 \cdot 2n(n+1)(2n+1)$, где n и $n+1$ — два последовательных натуральных числа, значит, одно из них четное. Итак, среди множителей рассматриваемого произведения имеются $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, т. е. оно кратно 24.

362. Если a не делится на 3 и b не делится на 3, то могут быть следующие случаи:

1) Каждое из чисел a и b при делении на 3 дает в остатке 1, т. е. $a = 3k + 1$, $b = 3m + 1$, следовательно, $a - b = 3k + 1 - 3m - 1 = 3(k - m)$ делится на 3.

2) a и b при делении на 3 дают остатки, равные 2, т. е. $a = 3k + 2$, $b = 3m + 2$, тогда $a - b = 3k + 2 - 3m - 2 = 3(k - m)$ делится на 3.

3) Одно из чисел a или b дает при делении на 3 остаток 1, а другое — 2, например: $a = 3k + 1$, $b = 3m + 2$, $a + b = 3k + 1 + 3m + 2 = 3(m + k + 1)$ делится на 3.

363. $(3a + 1)(3b + 1) = 9ab + 3a + 3b + 1 = 3(3ab + a + b) + 1$; $3(3ab + a + b)$ делится на 3, значит, $3(3ab + a + b) + 1$ при делении на 3 дает остаток 1.

364. $(3a + 1)(3b + 2) = 3(3ab + 2a + b) + 2$;

$3(3ab + 2a + b)$ делится на 3;

$3(3ab + 2a + b) + 2$ при делении на 3 дает остаток 2.

366. Пусть a, b и c однозначные, причем $a \neq 0$, тогда $100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99(a - c)$.

Один из сомножителей полученного выражения делится на 9 и на 11, следовательно, все это произведение разделится на 9 и на 11. В частном случае, если $a = c$, то произведение $99(a - c) = 0$, т. е. делится на 9 и на 11.

367. $1000a + b - (1000b + a) = 999(a - b)$, где a и b — однозначные числа, причем $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Один из сомножителей 999 делится как на 27, так и на 37, следовательно, $999(a - b)$ делится на 27 и 37.

368. $1000a + 10c + d$ — первоначальное число,

$1000d + 100c + a$ — число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

а) $1000a + 10c + d - (1000d + 100c + a) = 9(111a - 10c - 111d)$.

Один из сомножителей делится на 9, значит, и произведение делится на 9.

б) 9 на 111 не делится.

$(111a - 111d)$ делится на 111, но $10c$ на 111 (и на 37) не делится, значит, $(111a - 111d - 10c)$ не делится на 37 и, следовательно, на 111.

369. $(n+2)[n(n+1)+6] = n(n+1)(n+2)+6(n+2)$. Каждое из слагаемых делится на 6, значит, и сумма делится на 6.

370. Пусть последовательные нечетные числа $2n+1$ и $2n+3$ имеют наибольший общий делитель d, тогда разность этих чисел $(2n+3) - (2n+1) = 2$ должна делиться на d, что возможно лишь при $d = 1$, так как данные числа нечетные.

372. Пусть наибольшим общим делителем чисел $14n+3$ и $21n+4$ является d, тогда и разность этих чисел $21n+4 - (14n+3) = 7n+1$ также делится на d, поэтому и число, в два раза большее $14n+2$, делится на d, но по предположению $14n+3$ делится на d, поэтому и разность $14n+3 - (14n+2) = 1$ делится на d, т. е. $d = 1$, а дробь $\frac{14n+3}{21n+4}$ несократима.

373. $(100-a)(100-b) = 100(100-a-b) + ab = 100[(100-a)-b] + ab$.

374. 1) $(10a+b)(10a+c) = 100a^2 + 10ac + 10ab + bc = 10a(10a+c+b) + bc = 10a[(10a+b)+c] + bc$.

Пример: $23 \cdot 28 = (23+8) \cdot 20 + 3 \cdot 8 = 620 + 24 = 644$.

2) $(10a+b)(10a+c) = 100a^2 + 10ab + 10ac + bc = 100a^2 + 10a(b+c) + bc = 100a^2 + 100a + bc = 100a(a+1) + bc$.

Пример: $23 \cdot 27 = 100 \cdot 2 \cdot 3 + 21 = 621$.

Доказанные формулы дают правила для устного умножения указанных двузначных чисел.

375. Данное выражение представляет квадрат суммы чисел $x^2 - ax + b$ и $ax - b$, т. е. $(x^2 - ax + b + ax - b)^2 = x^4$.

376. Данное выражение представляет собой разность куба разности двух чисел $x^3 + ax - b$ и $ax - b$ и разности кубов чисел x^3 и 5, т. е. $[(x^3 + ax - b) - (ax - b)]^3 - [(x^3)^3 - 5^3] = x^9 - x^9 + 125 = 125$.

377. Разность $(10x+y) - (10y+x) = 9(x-y)$ представляет произведение двух сомножителей, из которых $9 = 3^2$. Значит, второй сомножитель тоже должен быть

квадратом целого числа. Но по смыслу задачи $0 \leqslant x - y < 9$. Следовательно, искомое условие выполняется: 1) если обе цифры двузначного числа одинаковы, а также 2) если $x - y$ равно 1 или 4, т. е. цифра десятков больше цифры единиц на 1 или на 4.

378. Пусть дана дробь $\frac{a}{b}$, тогда $\frac{a-1}{b-1} = \frac{1}{2}$, отсюда $b = 2a - 1$, где a — натуральное число, большее 1.

379. Если данная дробь $\frac{a}{b}$, то $\frac{a+1}{b+1} = \frac{1}{3}$, значит, $b = 3a + 2$.

380. $a + (a + 1) + (a + 2) = 3a + 3$, что делится на 3, т. е. не является простым числом.

381. Пусть искомое число $10a + b$, тогда $10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$, т. е. чтобы число от перемены цифр местами увеличилось на 36, надо, чтобы разность $a - b$ равнялась 4, отсюда, если $b = 1$, то $a = 5$; если $b = 2$, то $a = 6$; если $b = 3$, то $a = 7$; если $b = 4$, то $a = 8$; если $b = 5$, то $a = 9$.

Искомые числа: 15, 26, 37, 48, 59.

382. Дано двузначное число $10a + b$; если вставить между цифрами этого числа нуль, то получим $100a + b$, отсюда уравнение: $(10a + b) \cdot 8{,}5 = 100a + b$, т. е. $b = 2a$, значит, искомые числа: 12, 24, 36, 48.

383. а) 2; б) 2 и $-1{,}5$; в) нет решения; г) $|x - 2| = 2 - 2x$, т. е. $2 - 2x > 0$, $x < 1$; $x - 2 = 2 - 2x$ и $x - 2 = 2x - 2$, откуда $x = 0$ и $x = 1\frac{1}{3}$. Ответ: $x = 0$; д) нет корней; е) -2; ж) 3 и $6\frac{1}{3}$; з) 2 и -2; и) -3 и 4.

Рассмотреть случаи $x > 3$, $x \leqslant -2$, $-2 < x \leqslant 3$;

к) 0 и 2; л) 4,5; м) -5 и $-\frac{1}{3}$; н) $-4 \leqslant x \leqslant 1$.

384. а) $-5 \leqslant x \leqslant 5$; б) 8; в) $-2 < x - 3{,}5 < 2$, т. е. $1{,}5 < x < 5{,}5$; г) $x > 5$; $x < -5$; д) $x - 4 > 5$, т. е. $x > 9$, и $x - 4 < -5$, т. е. $x < -1$; е) $x > 2$ и $x < -4$; ж) $x > 1{,}7$; $x < -1{,}7$; з) $3 < x < 7$; $-7 < x < -3$; и) нет решения; к) $|7x + 1| > -6$, x — любое число.

385. Очевидно, что 43^4 оканчивается той же цифрой, что и 3^4.

$43^{43} = 43^{40} \cdot 43^3 = (43^4)^{10} \cdot 43^3$.

$(43^4)^{10}$ оканчивается 1.

43^3 оканчивается 7, значит, и 43^{43} оканчивается 7.

7^4 оканчивается 1.

$7^{16} = (7^4)^4$ оканчивается 1.

7^{17} оканчивается 7, поэтому 17^{17} оканчивается 7.

$43^{43} - 17^{17}$ оканчивается на 0 $(7 - 7 = 0)$, следовательно, $43^{43} - 17^{17}$ делится на 10.

386. $A > B$. **387.** При $x < 0$ и при $0 < x < 1$.

388. Первое выражение больше второго на 30.

389. Второе выражение больше первого на 12.

390. 50°. **391.** 74°.

392. Пусть CK — биссектриса внутреннего угла, а CE — биссектриса внешнего угла, тогда $CK \perp CE$, т. е. $\triangle CEK$ прямоугольный, в котором $\angle EKC = 54°$, значит, $\angle E = 36°$.

393. Пусть дан $\triangle ABC$, в котором AC — основание, а биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O, тогда $\angle AOB = 130°$. В $\triangle BOA$ $\angle ABO + \angle BAO = 50°$, значит, $\angle ABC + \angle BAC = 100°$, а третий угол треугольника ABC равен 80°, поэтому $\angle BAC = 80°$, а $\angle ABC = 20°$.

394. 10 : 11 : 15. **395.** 33°; 57°.

396. 13°; 13°. **397.** 62°. **398.** 40°.

399. 1) $6 + 7 + 11 = 24$ (части) составляет сумма внешних углов треугольника.

2) $\frac{360° \cdot 6}{24} = 90°$ — один из внешних углов, а с ним смежный внутренний тоже равен 90°, а значит, два других угла будут меньшими углами треугольника. Высоты, проведенные из вершин этих углов, совпадают с катетами, следовательно, угол между высотами равен 90°.

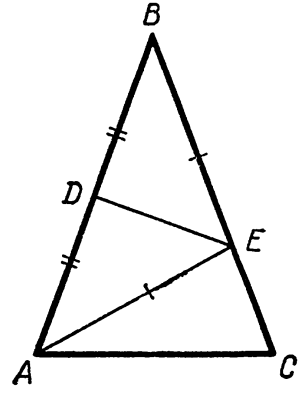


Рис. 26

400. $AB = BC = 15$ *см* (рис. 26); $AE + EC = BE + EC = 15$ *см*; $P_{AEC} = 10 + 15 = 25$ (*см*).

401. 21.

402. $\frac{103 \cdot 100}{2} = 5150$ (диагоналей).

403. Один многоугольник имеет вершины за номерами 42, 43, ..., 81, следовательно, у него 40 вершин и 40 сторон. Другой многоугольник имеет вершины за номерами 1, 2, 3, ..., 42; 81, ..., 100, следовательно, у него $42 + 20 = 62$ вершины и 62 стороны.

404. $\frac{(n-2)(n-5)}{2}$.

406. 1) $\triangle BKE = \triangle B_1K_1E_1$ (по катету и гипотенузе), значит, $\angle BKC = \angle B_1K_1C_1$ (рис. 27).

2) $\triangle BKC = \triangle B_1K_1C_1$, значит, $\angle C = \angle C_1$ и $BC = B_1C_1$.

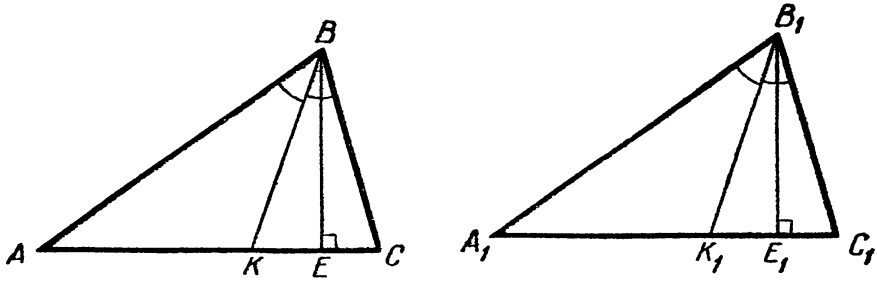


Рис. 27

3) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ ($BC = B_1C_1$; $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$; $\angle C = \angle C_1$).

407. $\triangle ABC = \triangle KNM$, следовательно, $BC = KM$ (рис. 28).

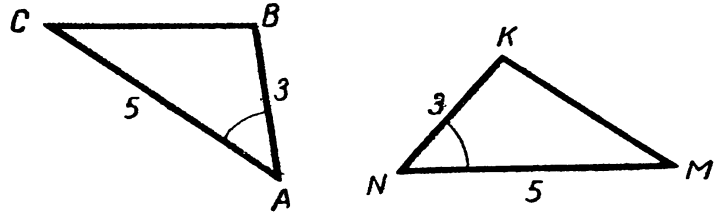


Рис. 28

408. $\triangle BDC = \triangle KMA$, следовательно, $DC = AK$ (рис. 29).

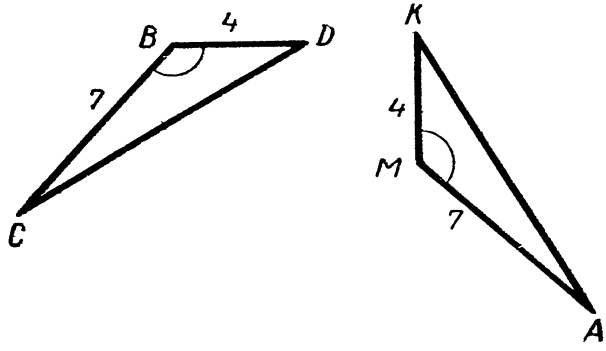


Рис. 29

409. Пусть $AK = KC$ и $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 30). Продолжим BK на отрезок $KE = BK$, соединим E с A и C. $\triangle AKE = \triangle BKC$, значит, $AE = BC$, $\angle 2 = \angle 3$. $\triangle ABE$; $\angle 1 = \angle 3$, значит, $AE = AB$, а $AE = BC$, т. е. $AB = BC$.

410. Биссектриса угла при основании делит данный треугольник на два равнобедренных треугольника.

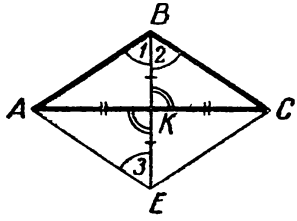


Рис. 30

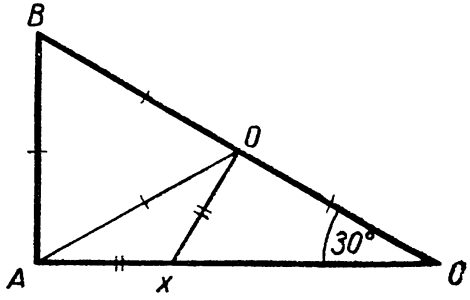


Рис. 31

411. 1) O — середина BC (рис. 31), $\triangle ABO$ равносторонний ($AB = 0{,}5\ BC = BO$, $\angle B = 60°$), значит, $\angle BAO = 60°$.

2) $\angle OAX = \angle BAC - \angle BAO = 90° - 60° = 30°$.

3) $\angle BOA = 60°$, значит, $\angle AOX = 30°$; $\angle BOX = 90°$ ($XO \perp BC$). Значит, $\triangle AXO$ — равнобедренный, $AX = OX$.

4) $\triangle XOC$; $XO = 0{,}5\ XC$ и $AX = 0{,}5\ XC$, поэтому $AX = \frac{1}{3} AC$, следовательно, и $XO = \frac{1}{3} AC$.

412. 1) $\triangle AB_1C = \triangle ABC_1$ ($AB = AB_1$; $AC = AC_1$; $\angle A$ — общий). Значит, $BC = B_1C_1$ и $\angle BC_1A = \angle ACB_1$ (рис. 32).

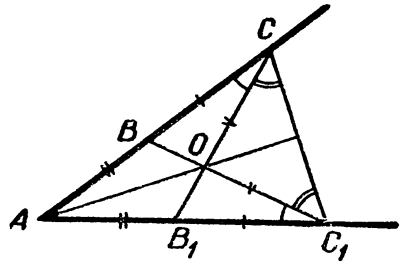


Рис. 32

2) $\triangle ACC_1$ равнобедренный, следовательно, $\angle ACC_1 = \angle AC_1C$, а значит, и $\angle OCC_1 = \angle OC_1C$, поэтому $OC = OC_1$.

3) $\triangle AOC = \triangle AOC_1$, значит, $\angle CAO = \angle OAC_1$, т. е. AO — биссектриса $\angle CAC_1$.

413. Треугольники AKM и MEB равнобедренные (рис. 33).

414. $\angle ADE = \angle B + \angle BAD$, так как $\angle ADE$ внешний к треугольнику ABD (рис. 34). Аналогично $\angle AED =$

$= \angle C + \angle EAC$, значит, $\angle ADE = \angle AED$, т. е. $\triangle ADE$ равнобедренный.

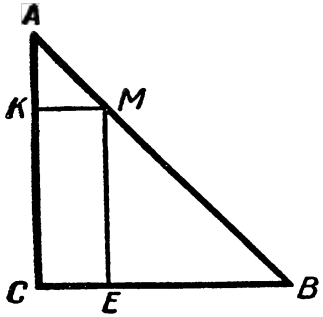


Рис. 33

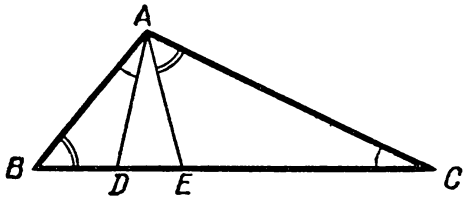


Рис. 34

415. $\angle ABC$ равен удвоенному $\angle 1$ (рис. 35), а так как $\angle 4 = 0{,}5\angle ABC$ (BD — биссектриса $\angle ABC$), значит, $\angle 4 = \angle 1$. Это соответственные углы при BD и MC и секущей AM, следовательно, $BD \parallel MC$.

416. 1) $\angle ABD$ — внешний угол по отношению к $\triangle ABK$ (рис. 36). $AB = BK$ по условию; $\angle AKB = \angle BAK$, следовательно, $\angle ABD = \angle AKB + \angle BAK = 2\angle AKB$, значит, $\angle AKB = 15°$

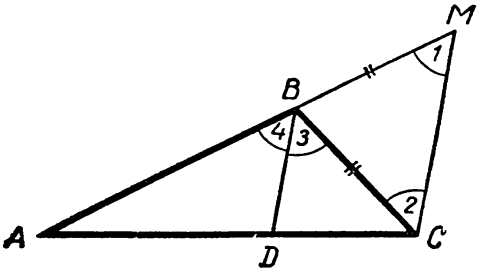


Рис. 35

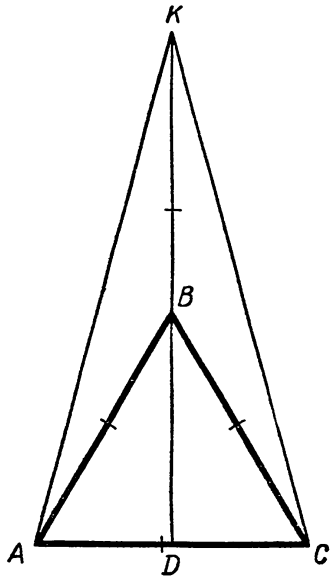


Рис. 36

2) $\angle ABD = 30°$ (BD — биссектриса угла равностороннего треугольника ABC).

3) $\angle AKB = \angle BKC = 15°$ (так как $\triangle AKB = \triangle BKC$).

4) $\angle ABC + \angle AKC = 60° + 2 \cdot 15° = 90°$.

417. 1) $\triangle BMC$; (рис. 37) $\angle BMC = \frac{180° - \angle B}{2}$.

2) $\triangle AKC$; $\angle AKC = \frac{180° - \angle A}{2}$.

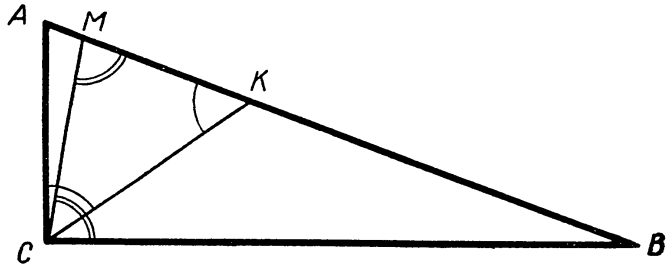


Рис. 37

3) $\angle BMC + \angle AKC = \frac{180° - \angle A}{2} + \frac{180° - \angle B}{2} =$
$= \frac{360° - (\angle A + \angle B)}{2} = 135°$.

4) $\angle MCK = 180° - 135° = 45°$.

418. В прямоугольном $\triangle FCE$ (рис. 38) $MF = MC$, следовательно,

в том же $\triangle FCE$

$$\angle FCM = \angle F \qquad (1)$$
$$\angle DCE = \angle F. \qquad (2)$$

(Как углы с соответственно перпендикулярными сторонами.)

В $\triangle ABC$ из того, что $CD = AD$, следует

$$\angle DCE = \angle A. \qquad (3)$$

Из равенств (1), (2), (3) следует:

$$\angle FCM = \angle A. \qquad (4)$$

В $\triangle ABC$

$$\angle ABC = \angle CBN = 90° - \angle A. \qquad (5)$$

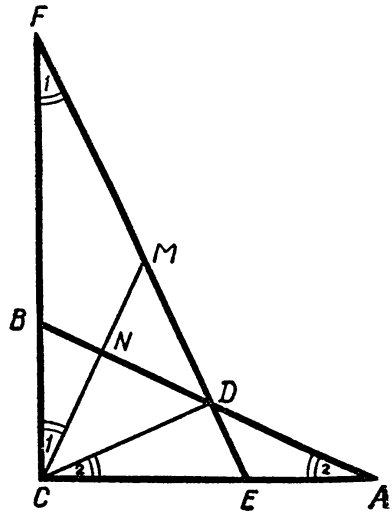


Рис. 38

В $\triangle CBN$ $\angle BNC = 180° - (\angle FCN + \angle CBN)$, а на основании равенств (4) и (5) $\angle BNC = 180° - (\angle A + 90° - \angle A) = 90°$, т. е. $CM \perp AB$.

419. 1) Отложим на AB (рис. 39) отрезок $AK = AE$ и соединим точки K с E и K с D.

2) $\triangle AKD = \triangle AED$, так как AD — общая,
$\angle KAD = \angle DAE$ (AD — биссектриса $\angle BAC$),
$AK = AE$ (по построению).

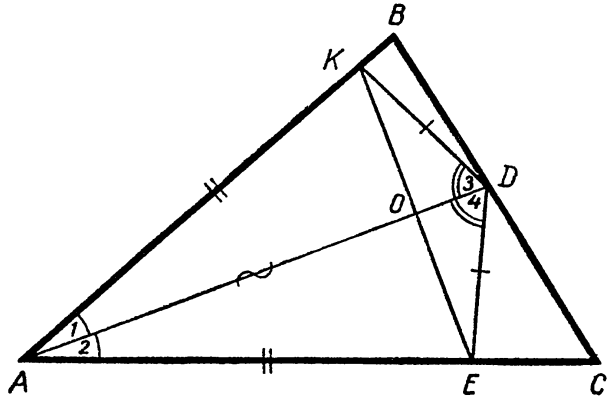


Рис. 39

Из равенства этих треугольников следует:
$KD = ED$, т. е. $\triangle KED$ — равнобедренный; из равенства этих же треугольников следует, что $\angle KDA = \angle ADE$. Значит, в $\triangle KDE$ DO является биссектрисой $\angle KDE$.

3) Докажем, что $\triangle KBD$ — равнобедренный.

а) $\angle BKD$ к $\triangle AKD$ внешний, значит,
$\angle BKD = \angle KAD + \angle KDA$; $\angle BKD = \angle 1 + \angle 3$.

б) $\angle EDC = \angle BAC = 2\angle 1$.
$\angle KDC = 2\ \angle 3 + 2\ \angle 1$.
$\angle KDC$ — внешний к $\triangle KBD$, значит,
$\angle KDC = \angle KBD + \angle BKD$, отсюда
$\angle KBD = \angle KDC - \angle BKD = 2\angle 3 + 2\angle 1 - (\angle 1 + \angle 3) = \angle 1 + \angle 3$,

т. е. $\angle KBD = \angle DKB$, следовательно, $\triangle KBD$ — равнобедренный, т. е. $KD = BD$, а так как $KD = ED$, то $ED = BD$.

420. I способ

$\angle 1 = \angle 2$ (рис. 40),
$\angle 3 = \angle 4$,
следовательно, $\angle ABD = \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4 = \angle A + \angle D$.

II способ

C — центр круга, проходящего через точки A, B и D, откуда следует, что $\angle ABD = 90°$, т. е. $\angle ABD = \angle A + \angle D$.

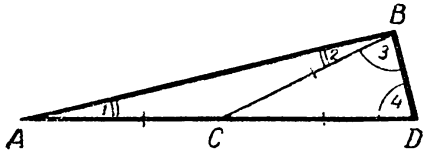


Рис. 40

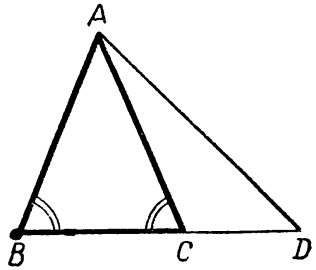


Рис. 41

421. $\angle ACB > \angle ADC$ (рис. 41), но $\angle ACB = \angle ABC$, следовательно, $\angle ABC > \angle ADC$.

422. $\angle BMC > \angle BNC$ (внешний угол) (рис. 42), $\angle BNC > \angle BAC$ (внешний угол), следовательно, $\angle BMC > \angle BAC$.

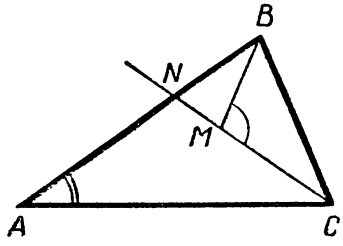


Рис. 42

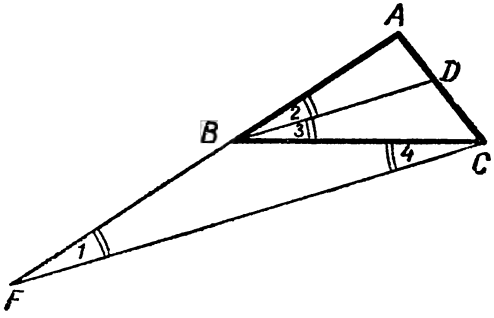


Рис. 43

423. $\angle 2 = \angle 3$ (BD — биссектриса угла) (рис. 43), $\angle 3 = \angle 4$ (накрест лежащие углы), $\angle 2 = \angle 1$ (соответственные углы).

Отсюда, $\angle 1 = \angle 4$, а следовательно, $BF = BC$.

424. I случай

Пусть M и N лежат по разные стороны от AB, кратчайшее расстояние между ними есть отрезок MN, следовательно, искомая точка X лежит на пересечении AB с MN.

Всякая другая точка X_1 прямой AB не обладает этим свойством, так как

$$MX_1 + X_1N > MN.$$

II случай

M и N лежат по одну сторону от AB (рис. 44). Строим M_1, симметричную M относительно AB, после чего задача сводится к I случаю.

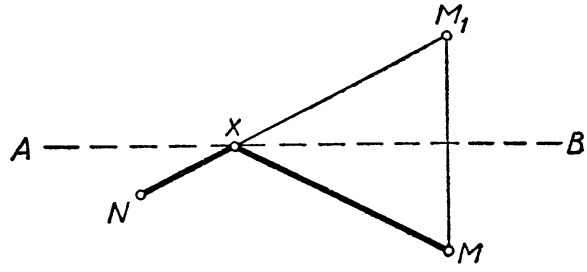


Рис. 44

Если $MN \perp AB$, то искомая точка X — есть точка пересечения прямой MN с AB.

425. I случай

Точки M и N (рис. 45) лежат по одну сторону от прямой AB (и притом на разных расстояниях от нее). Тогда точка X прямой AB, для которой разность расстояний от точек M и N наибольшая, есть точка пересечения прямой AB с продолжением отрезка MN. Тогда

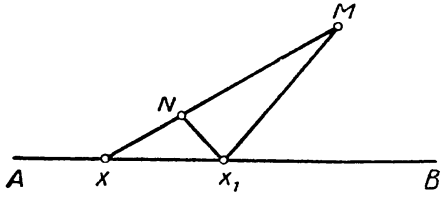


Рис. 45

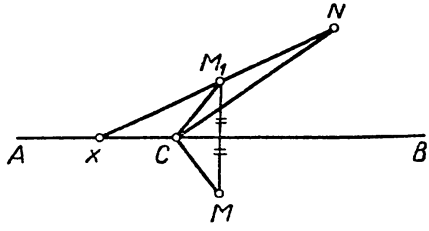


Рис. 46

$XM - XN = MN$. Всякая другая точка X_1 прямой AB не обладает этим свойством, так как $X_1M - X_1N < MN$ (свойство сторон треугольника).

Если M и N находятся на одинаковом расстоянии от AB, задача не имеет решения.

II случай

Точки M и N (рис. 46) лежат по разные стороны от AB. Тогда искомая точка X есть точка пересечения M_1N с AB, где M_1 — точка, симметричная точке M относи-

тельно AB. Если точки M и N находятся по разные стороны от AB и на одинаковом от нее расстоянии, то задача не имеет решения.

426. Искомая точка лежит на пересечении биссектрисы угла NPM и стороны MN.

428. Искомая точка лежит на пересечении биссектрисы угла A со срединным перпендикуляром к BC.

429. Искомая точка лежит на пересечении биссектрисы угла A со срединным перпендикуляром к BC.

Если $AB = AC$, то любая точка биссектрисы угла A удовлетворяет условию задачи.

430. Искомая точка — это точка пересечения биссектрисы данного угла с прямой, параллельной одной из сторон данного угла и находящейся от нее на расстоянии, равном a.

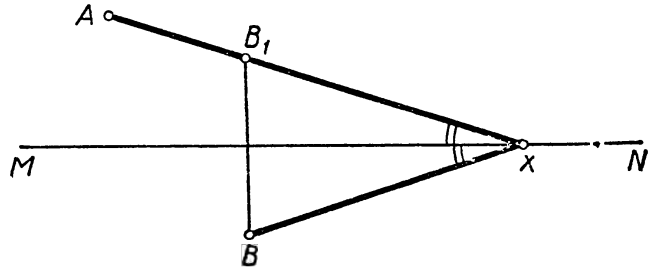


Рис. 47

431. Предположим, задача решена и точка X — искомая (рис. 47), тогда $\angle AXM = \angle MXB$. Если построить точку B_1, симметричную B относительно MN, то B_1 будет лежать на AX. Отсюда построение: соединяем A с точкой B_1 (симметричной B) и продолжаем AB_1 до пересечения с MN в точке X. Прямые AX и BX искомые, так как образуют равные углы с MN. Задача имеет решение, если A и B лежат по разные стороны от MN.

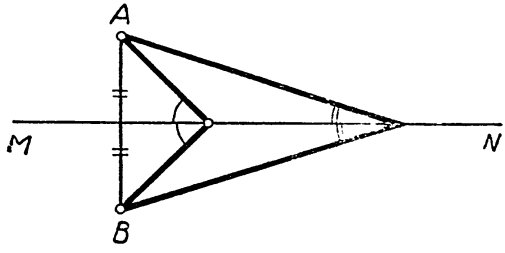


Рис. 48

Если A и B (рис. 48) находятся на равном расстоянии от MN и если $AB \perp MN$, то таких прямых можно

провести бесконечное множество, так как лучи, исходящие из любой точки прямой MN и проходящие через A и B, образуют равные углы с MN.

Задача не имеет решений в следующих случаях: 1) A и B расположены по одну сторону от MN (или одна из точек лежит на MN); 2) A и B расположены по разные стороны от MN на одинаковом от нее расстоянии, но AB не перпендикулярна к MN.

432. (Рис. 49.) См. решение задачи № 424.

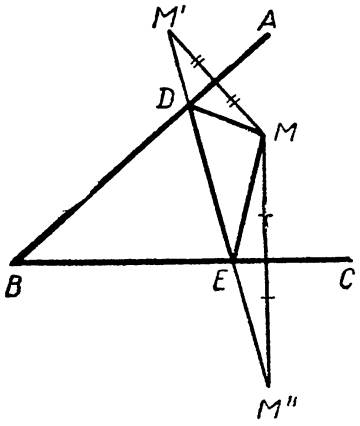


Рис. 49

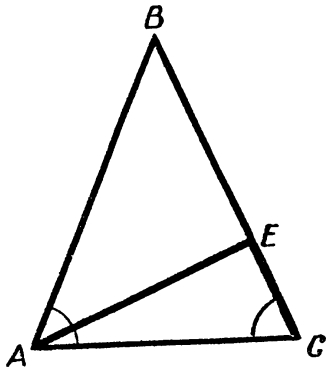


Рис. 50

433. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника ACE (рис. 50) по двум катетам (двум данным отрезкам). Полученный угол C — угол при основании AC равнобедренного треугольника, поэтому строим при точке A угол, равный C. Треугольник ABC искомый.

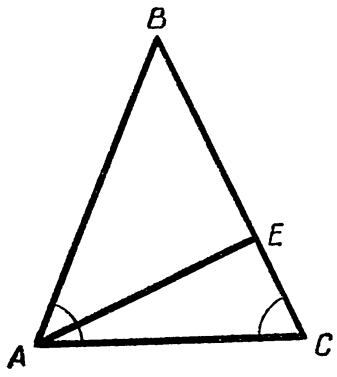


Рис. 51

434. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника (рис. 51) по катету (данной высоте) и гипотенузе (данному основанию). Полученный треугольник AEC достраиваем до искомого равнобедренного.

435. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника CEK (рис. 52) по катету (данной высоте) и гипотенузе (данной биссектрисе).

Строим $\angle ACE = \angle ECD = 45°$. Треугольник ADC искомый.

436. Анализ. Пусть задача решена и $\triangle KBM$ искомый (рис. 53). Продолжив KM в обе стороны на $AK = MC = KB$, получим равнобедренный треугольник ABC, в котором известно основание (периметр искомого треугольника) и высота (на чертеже она не указана).

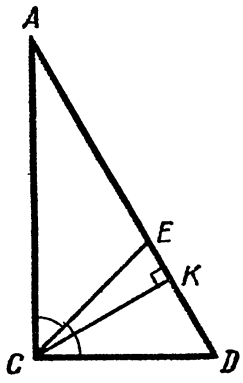


Рис. 52

Построение. Строим равнобедренный треугольник по основанию AC, равному данному периметру, и высоте, восставленной к AC из его середины.

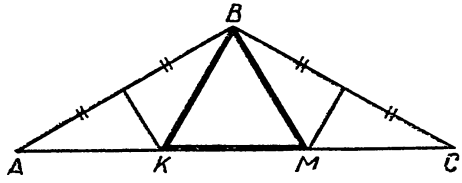


Рис. 53

Построив срединные перпендикуляры к AB и BC (геометрические места точек, равноудаленных: 1) от B и A; 2) от B и C), найдем вершины K и M искомого треугольника.

Доказательство не представляет затруднений.

Исследование. Если $O < H < p$, где p — полупериметр, задача имеет одно решение, так как все операции однозначны и выполнимы. Если $H \geqslant p$, то задача решения не имеет.

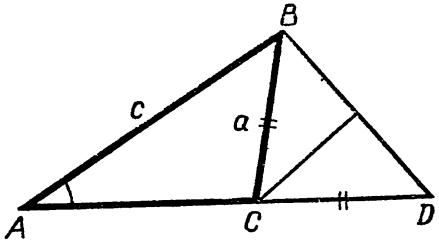


Рис. 54

437. Анализ. Предположим, что задача решена и $\triangle ABC$ — искомый (рис. 54). Отложим на продолжении AC отрезок $CD = BC = a$, тогда $\triangle BCD$ — равнобедренный, а в $\triangle ABD$: $AD = b + a$; $AB = c$; $\angle BAC = \angle A$.

Построение. Строим $\triangle ABD$ по двум сторонам $a + b$ и c и углу A, заключенному между ними. Построим г. м. т., равноудаленных от B и D, найдем вершину C искомого треугольника ABC.

Исследование. Задача имеет единственное решение, если $a+b>c$.

438. Пусть $\triangle ABC$ — искомый (рис. 55). Продолжим катет BC за точку C и отложим $BD=c$, получим $BD=AB$, тогда $CD=c-a$.

$\triangle ACD$ можно построить, так как он прямоугольный и в нем известны катеты $AC=b$ и $CD=c-a$.

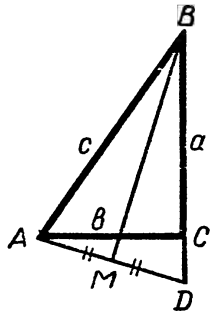


Рис. 55

Построение. Строим прямоугольный треугольник ACD по двум катетам. Проводим перпендикуляр к AD через середину AD до пересечения с продолжением CD в точке B. $\triangle ABC$ — искомый, что нетрудно доказать.

Исследование. Задача имеет единственное решение, если $c-a<b$.

439. Пусть $\triangle ABC$ — искомый (рисунок 56), в котором $AD=AB-BC$.

1. $\angle A$ — острый. Строим $\triangle ADC$ (по двум сторонам b, $c-a$ и углу A, заключенному между ними). Проводим к отрезку CD через его середину перпендикуляр до пересечения с продолжением AD в точке B, тогда B соединяем с точкой C и получаем искомый $\triangle ABC$.

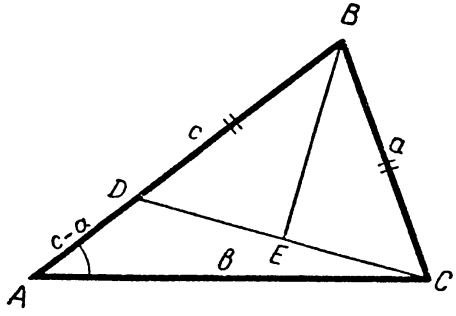


Рис. 56

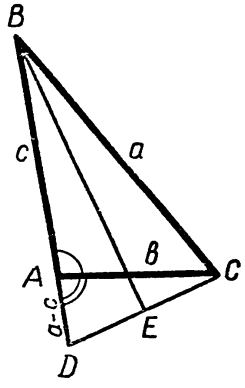


Рис. 57

2. Пусть $\angle A$ — тупой (рис. 57). Решение аналогично решению задачи № 438.

440. Допустим, задача решена и $\triangle ABC$ построен (рис. 58). Продолжим CB на $BE=AB=c$. Задача сво-

дится к построению треугольника ($\triangle CAE$) по двум сторонам AC, CE и высоте, опущенной на CE.

Построение. Строим $\triangle CAE$. $CE=a+c$, на расстоянии h_a проводим прямую $MN \parallel CE$, с центром в точке C проводим дугу радиусом, равным b, до пересечения с MN в точке A. Получаем $\triangle ACE$. Через середину отрезка AE проводим к нему перпендикуляр до пересечения с CE в точке B. $\triangle ABC$ — искомый.

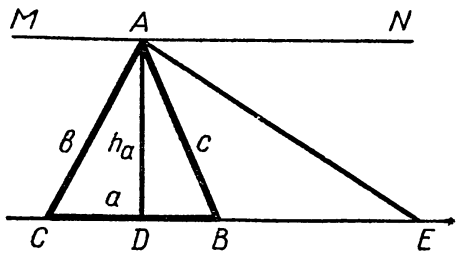


Рис. 58

Доказательство. $AB=BE=c$; $CE=a+c$; значит, $CB+AB=a+c$. $AC=b$, $AD \perp CB$, $AD=h_a$.

Исследование. 1) Задача имеет два решения, если $h_a<b<a+c$, так как дуга с центром в точке C

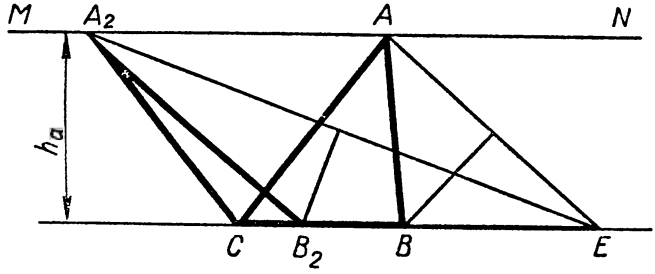


Рис. 59

радиусом b пересекает MN в двух различных точках; $\triangle CA_2B_2$ и $\triangle CAB$ — искомые (рис. 59).

2) Если $b=h_a$, то задача имеет решение и притом только одно: $\triangle ABC$ — прямоугольный с углом $C=90°$.

3) Если $b<h_a$, то задача не имеет решения.

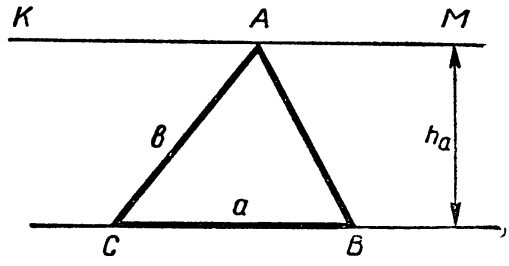


Рис. 60

441. $CB=a$ (рис. 60), $KM \parallel CB$ на расстоянии, равном h_a. С центром в точке C проводим дугу радиусом b до пересечения с KM. $\triangle ABC$ — искомый.

Задача имеет одно решение, если b равно h_a; два решения, если $b > h_a$; нет решения, если $b < h_a$ (см. задачу № 440).

442. Задача сводится к построению треугольника по трем сторонам $\left(\frac{a}{2};\ m_a;\ b\right)$.

443. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника по катету и гипотенузе. Строим $BD \perp MN$ и откладываем $BD = h$. С центром в точке B (рис. 61) радиусом a проводим дугу до пересечения с MN в точке A. Отложим $AC = a$. Треугольник ABC — искомый.

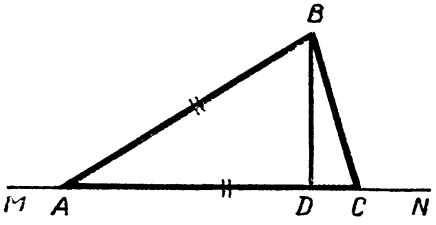


Рис. 61

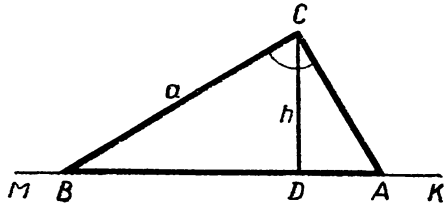


Рис. 62

444. Задача сводится к построению прямоугольного $\triangle BDC$ (рис. 62) по катету h и гипотенузе a. Затем проводим $AC \perp BC$ до пересечения с продолжением BD в точке A.

445. $a^3 + 3a^2 - a^2 - 3 = (a - 1)(a^2 + 3a + 3)$.

446. $(a^3 + 8) + (a^2 - 4) = (a + 2)(a^2 - a + 2)$.

447. $x^3 - x - 6x - 6 = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$.

448. $a^5 + a^4 - a^4 + a^3 - a^3 + a^2 - a^2 + a + 1 =$
$= (a^5 + a^4 + a^3) - (a^4 + a^3 + a^2) + (a^2 + a + 1) =$
$= (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1)$.

449. $a^3 - 6a^2 + 12a - 8 - 12a + 8 + 30 - a =$
$= (a - 2)^3 - (a - 2) - 12a + 36 = (a - 2)[(a - 2)^2 -$
$- 1] - 12(a - 3) = (a - 2)(a - 3)(a - 1) - 12(a - 3) =$
$= (a - 3)[(a - 2)(a - 1) - 12] = (a - 3)(a^2 - 3a - 10) =$
$= (a - 3)(a^2 - 5a + 2a - 10) = (a - 3)[a(a - 5) + 2(a - 5)] =$
$= (a + 2)(a - 3)(a - 5)$.

450. Рассмотрим выражения $a - b$, $a + c$ и $2a + c - b$,

увидим, что $2a+c-b=(a-b)+(a+c)$, поэтому последний член $bc(2a+c-b)$ представим в виде суммы двух слагаемых:

$$ab(a-b)-ac(a+c)+bc(a+c)+bc(a-b)=$$
$$=(a-b)(ab+bc)+(a+c)(bc-ac)=b(a-b)(a+c)+$$
$$+c(a+c)(b-a)=(a-b)(a+c)(b-c).$$

451. $(b-c)+(a-b)=a-c$;

$$bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(b-c)-ac(b+d)(a-b)+$$
$$+ab(c+d)(a-b)=(b-c)[bc(a+d)-ac(b+d)]+$$
$$+(a-b)[ab(c+d)-ac(b+d)]=$$
$$=c(b-c)[ab+bd-ab-ad]+a(a-b)[bc+bd-bc-cd]=$$
$$=cd(b-c)(b-a)+(a-b)ad(b-c)=$$
$$=(b-c)(a-b)(ad-cd)=d(b-c)(a-b)(a-c).$$

452. $(a-x)+(x-y)=a-y$;

$$(a-x)y^3-(a-x)x^3-(x-y)x^3+(x-y)a^3=$$
$$=(a-x)(y^3-x^3)+(x-y)(a^3-x^3)=$$
$$=(a-x)(x-y)(a^2+ax+x^2-x^2-xy-y^2)=$$
$$=(a-x)(x-y)[(a^2-y^2)+(a-y)x]=$$
$$=(a-x)(x-y)(a-y)(a+x+y).$$

453. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc=$
$$=ab^2+abc+ac^2+abc+bc^2+b^2c+a^2c+a^2b=$$
$$=ab(c+b)+ac(c+b)+bc(c+b)+a^2(b+c)=$$
$$=(b+c)(bc+a^2+ab+ac)=(b+c)(a+c)(a+b).$$

454. Обозначим $x^2+4x+8=y$, тогда $y^2-3xy+2x^2=$
$$=(y-2x)(y-x)=(x^2+2x+8)(x^2+3x+8).$$

455. $(x^2+6x-1)^2+(x^2+1)^2+2(x^2+6x-1)(x^2+1)-1=$
$$=(x^2+6x-1+x^2+1)^2-1=(2x^2+6x)^2-1=$$
$$=(2x^2+6x-1)(2x^2+6x+1).$$

456. $2a^2x^2-2a^2x-a^2b^3x+4+2b^3x-4x-b^6=$
$$=(2a^2x^2-a^2b^3x-2a^2x)+(2b^3x-b^6-2b^3)-(4x-2b^3-4)=$$
$$=a^2x(2x-b^3-2)+b^3(2x-b^3-2)-2(2x-b^3-2)=$$
$$=(2x-b^3-2)(a^2x+b^3-2).$$

457. $n^3-4an-4n^2+anx-n^2x-ax^2+16a=$
$$=n^3-4an-4n^2+anx-n^2x-ax^2+16a+4ax-4ax=$$
$$=(16a-4ax-4n^2)+(4ax-ax^2-n^2x)+(n^3-4an+axn)=$$
$$=4(4a-ax-n^2)+x(4a-ax-n^2)+n(n^2-4an+ax)=$$
$$=(4a-ax-n^2)(4+x-n).$$

458. $\dfrac{x^4+2a^2x^2+a^4-a^2x^2}{x^3+a^3}=\dfrac{(x^2+a^2)^2-a^2x^2}{x^3+a^3}=$

$=\dfrac{(x^2+a^2-ax)(x^2+a^2+ax)}{(x+a)(x^2-ax+a^2)}=\dfrac{x^2+ax+x^2}{x+a}.$

459. $\dfrac{a^{n-1}(8a^3+1)}{a^n(16a^4+4a^2+1)}=\dfrac{(2a+1)(4a^2-2a+1)}{a(16a^4+8a^2+1-4a^2)}=$

$=\dfrac{(2a+1)(4a^2-2a+1)}{a[(4a^2+1)^2-4a^2]}=\dfrac{(2a+1)(4a^2-2a+1)}{a(4a^2+1-2a)(4a^2+1+2a)}=$

$=\dfrac{2a+1}{a(4a^2+2a+1)}.$

460. $\dfrac{x^4-2x^2+1-x^2}{9(x^2+x-1)^2}=\dfrac{(x^2-1)^2-x^2}{9(x^2+x-1)^2}=$

$=\dfrac{(x^2-1+x)(x^2-1-x)}{9(x^2+x-1)^2}=\dfrac{x^2-x-1}{9(x^2+x-1)}.$

461. $\dfrac{(x^2+2)^2-4x^2}{a(x^2+2-2x)-(x^2-2x+2)}=$

$=\dfrac{(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)}{(x^2+2-2x)(a-1)}=\dfrac{x^2+2x+2}{a-1}.$

462. $\dfrac{n^4+64+16n^2-16n^2}{x(n^2+4n+4)-4n+4x-n^2-8}=$

$=\dfrac{(n^2+8)^2-16n^2}{n^2x+4nx+4x-4n+4x-n^2-8}=$

$=\dfrac{(n^2+8)^2-16n^2}{n^2x+4nx+8x-4n-n^2-8}=\dfrac{(n^2+8)^2-16n^2}{x(n^2+4n+8)-(4n+n^2+8)}=$

$=\dfrac{(n^2+8+4n)(n^2+8-4n)}{(4n+n^2+8)(x-1)}=\dfrac{n^2-4n+8}{x-1}.$

463. $\dfrac{(x^6-64)^2}{[(x^3-8)-4x(x-2)]^2}=\dfrac{(x^6-64)^2}{(x-2)^2[(x^2+2x+4)-4x]^2}=$

$=\dfrac{(x^3-8)^2(x^3+8)^2}{(x-2)^2(x^2-2x+4)^2}=(x+2)^2(x^2+2x+4)^2.$

464. $\dfrac{2^{19}\cdot3^9+2^{18}\cdot3^8\cdot5\cdot3}{2^9\cdot3^9\cdot2^{10}+2^{20}\cdot3^{10}}=\dfrac{2^{19}\cdot3^9+2^{18}\cdot3^9\cdot5}{3^9\cdot2^{19}+2^{20}\cdot3^{10}}=$

$=\dfrac{2^{18}\cdot3^9(2+5)}{2^{19}\cdot3^9(1+2\cdot3)}=\dfrac{7}{2\cdot7}=\dfrac{1}{2}.$

465. $\dfrac{5\cdot2^{30}\cdot3^{18}-2^2\cdot3^{20}\cdot2^{27}}{5\cdot2^9\cdot2^{19}\cdot3^{19}-7\cdot2^{29}\cdot3^{18}}=\dfrac{5\cdot2^{30}\cdot3^{18}-3^{20}\cdot2^{29}}{5\cdot2^{28}\cdot3^{19}-7\cdot2^{29}\cdot3^{18}}=$

$=\dfrac{2^{29}\cdot3^{18}(5\cdot2-3^2)}{2^{28}\cdot3^{18}(5\cdot3-7\cdot2)}=\dfrac{2\cdot1}{1}=2.$

466. Пусть недостающее число m, тогда $5(m+3x)\times$ $\times(x+1)-4(1+2x)^2=80$. Подставим значение $x=2$, получим уравнение относительно m: $5(m+6)\cdot3-$ $-4(1+4)^2=80$; отсюда $m=6$.

467. Пусть пропущено число k.

$3(2y+k)(3y+2)-2(3y+1)^2=43$; так как $y=1$, то $3(2\cdot 1+k)(3\cdot 1+2)-2(3\cdot 1+1)^2=43$, откуда $k=3$.

468. $x\neq 0$; $x\neq 2$. Решая данное уравнение, приходим к равенству $5x-4=5x-4$; это равенство верно при любых значениях x; но так как $x\neq 0$ и $x\neq 2$, то данному уравнению удовлетворяют любые числа, кроме 0 и 2.

469. Сложим данные дроби, получим: $x-a^2x+a=1$, причем $x\neq \pm b$, откуда $(1-a^2)x=1-a$.

1) при $a=1$ x — любое число, кроме $\pm b$;

2) при $a=-1$ нет решения;

3) при $a\neq \pm 1$ и $b\neq \pm\frac{1}{1+a}$; $x=\frac{1}{1+a}$;

4) при $b=\pm\frac{1}{1+a}$ нет решения.

470. 1) При $b=1$ x — любое число, кроме a;

2) при $b=-1$ нет корней;

3) при $a=-\frac{1}{1+b}$ нет корней;

4) при $b\neq \pm 1$ и при $a\neq -\frac{1}{1+b}$; $x=-\frac{1}{1+b}$.

471. Разложим на множители левую часть уравнения:

$$(3x+2)(2ax-3)=0;$$

$$x_1=-\frac{2}{3};\quad x_2=\frac{3}{2a},\ \text{если}\ a\neq 0.$$

472. Разложив на множители левую часть уравнения, получим:

$$(ax-2)(9x^2-4)=0,\quad \text{откуда}\quad x_1=\frac{2}{a},\quad \text{если}\quad a\neq 0,$$

$$x_{2;3}=\pm\frac{2}{3}.$$

473. Так как $x=1$, $y=1$, то $a(2\cdot 1+3\cdot 1)+b(2\cdot 1-3\cdot 1)=0$, $5a-b=0$; $b=5a$. Например, $a=1$, $b=5$; $a=-0{,}2$, $b=-1$.

474. Если двузначное число $10a+b$, то число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке $10b+a$, в их сумме $10a+b+10b+a=11(a+b)$.

Если $11(a+b)$ является квадратом натурального числа, то $a+b=11$.

Значит, так как $a \neq 1$, $\left|\begin{array}{l} a=2, \text{ то } b=9, \\ a=3, \text{ то } b=8, \\ a=4, \text{ то } b=7, \\ a=5, \text{ то } b=6, \end{array}\right.$

т. е. искомые числа 29 и 92, 38 и 83, 47 и 74, 56 и 65.

475. Пусть x *км* — расстояние от A до B, тогда за $\frac{x}{3}$ *ч* турист прошел бы путь со скоростью 3 *км/ч*, а чтобы прибыть к сроку, ему надо затратить $\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right)$ *ч*.

Турист шел первый час со скоростью 3 *км/ч*, затем $\frac{x-3}{4}$ *ч* со скоростью 4 *км/ч* и еще $\frac{3}{4}$ *ч* ожидал на станции отхода поезда, следовательно,

$$\frac{x}{3}-\frac{2}{3}=1+\frac{x-3}{4}+\frac{3}{4}, \text{ отсюда } x=20.$$

476. 21 *км* должен был пройти пешеход.

477. Сначала турист шел со скоростью $10:\frac{2}{3}=$ $=15$ (*км/ч*), а потом 12 *км/ч* ($15-3=12$).

Пусть расстояние от A до B x *км*. Если турист, пройдя 10 *км*, будет и дальше идти с той же скоростью 15 *км/ч*, то на оставшуюся часть пути, т. е. $(x-10)$ *км*, он затратит $\frac{x-10}{15}$ *ч* и придет на 24 *мин* $=\frac{2}{5}$ *ч* раньше срока, значит, он мог бы на оставшуюся часть пути затратить $\left(\frac{x-10}{15}+\frac{2}{5}\right)$ *ч*.

Если же турист $(x-10)$ *км* будет идти со скоростью 12 *км/ч*, то затратит $\frac{x-10}{12}$ *ч*, и все же придет на 10 *мин* $=$ $=\frac{1}{6}$ *ч* раньше срока, т. е. мог бы затратить $\left(\frac{x-10}{12}+\frac{1}{6}\right)$ *ч*, значит,

$$\frac{x-10}{15}+\frac{2}{5}=\frac{x-10}{12}+\frac{1}{6}, \text{ отсюда } x=24.$$

478. Пусть расстояние от M до N x *км*. Автобус с момента встречи легковой машины прошел расстояние, равное $(x-10-20)$ *км* со скоростью 40 *км/ч*, следовательно, затратил на этот путь $\frac{x-30}{40}$ *ч*.

Автобус за четверть часа прошел $40 \cdot 0{,}25=10$ (*км*), значит, легковая машина прошла с момента встречи

с автобусом расстояние $(10+x-20)$ *км* со скоростью 50 *км/ч*, т. е. затратила на движение $\frac{x-10}{50}$ *ч*, но так как она еще 0,25 *ч* была в городе M, то $\frac{x-30}{40} = \frac{x-10}{50}+0{,}25$; отсюда $x=160$.

479. x *км/ч* — скорость реки.

y *км/ч* — собственная скорость пловца.

	S *км*	V *км/ч*	t *ч*
I. Движение фляги	2	x	$\frac{2}{x}$
II. Движение пловца а) против течения	$\frac{1}{3}(y-x)$	$y-x$	$\frac{1}{3}$
б) по течению	$(y+x)\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{3}\right)$	$y+x$	$\frac{2}{x}-\frac{1}{3}$

Пловец проплыл по течению реки больше, чем против течения, на 2 *км*, следовательно,

$$(y+x)\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}(y-x)=2.$$

Решив это уравнение, в котором во всяком случае $y \neq 0$, получим:

$$\frac{2y}{x}=\frac{2y}{3}, \text{ т. е. } x=3.$$

Значит, скорость реки 3 *км/ч*, а собственная скорость пловца может быть любым числом, большим 3.

480. x *км* — расстояние, которое осталось пролететь самолету,

$(x+680)$ *км* — расстояние, которое пролетел самолет,

$(2x+680)$ *км* — все расстояние.

$$\frac{x+680}{780}+\frac{x}{830}=\frac{2x+680}{800}, \text{ отсюда } x=1660.$$

Самолет пролетел расстояние $1660\cdot 2+680=4000$ (*км*).

481. До того как мотоциклист обогнал автомобиль, машина прошла 24 *км* ($48\cdot 0{,}5=24$). Это расстояние

24 *км* мотоциклист проехал за 0,4 *ч* (24 : 60 = 0,4). Мотоциклист выехал позже автомобиля на 0,1 *ч* (0,5 − 0,4 = 0,1).

Обозначим через x *км* расстояние от A до B. Автобус до встречи с мотоциклистом проехал $(x - 12)$ *км* со скоростью 48 *км/ч*, т. е. затратил $\frac{x-12}{48}$ *ч*. Мотоциклист до встречи с автобусом проехал $(x + 12)$ *км* со скоростью 60 *км/ч*, затратив на это $\frac{x+12}{60}$ *ч*. Мотоциклист выехал на 0,1 *ч* позже автомобиля и еще был в пункте B 12 *мин*, т. е. 0,2 *ч*, значит, $\frac{x-12}{48} = \frac{x+12}{60} + 0{,}1 + 0{,}2$; отсюда $x = 180$.

482. 63 : 9 = 7 (*км/ч*) — скорость сближения пешеходов.

Если скорость одного из них x *км/ч*, то скорость другого $(7 - x)$ *км/ч*. Если бы скорость первого увеличить в 1,5 раза, то она стала бы равной $1{,}5x$ *км/ч*, а если скорость второго увеличить в 2 раза, то она стала бы равной $2(7 - x)$ *км/ч*, тогда их скорость сближения была бы равна 63 : 5,25 = 12 (*км/ч*), отсюда уравнение: $1{,}5x + 2(7 - x) = 12$; значит, скорость одного 4 *км/ч*, а другого 3 *км/ч*.

483. Обозначим расстояние между M и K через x *км*.

Мотоцикл должен идти со скоростью 62 *км/ч*, а автобус со скоростью 55 *км/ч*, значит, разница во времени равна $\left(\frac{x}{55} - \frac{x}{62}\right)$ *ч*.

Мотоцикл догнал автобус в 124 *км* от K, т. е. проехал $(x - 124)$ *км*, затратив $\frac{x-124}{62}$ *ч*.

Автобус проехал $\frac{2}{3}x$ *км* со скоростью 55 *км/ч* за $\frac{2x}{3 \cdot 55}$ *ч*, а потом $\left(\frac{1}{3}x - 124\right)$ *км* со скоростью 27,5 *км/ч* за $\frac{\frac{1}{3}x - 124}{27{,}5}$ *ч*, т. е. автобус затратил $\left(\frac{2x}{165} + \frac{\frac{1}{3}x - 124}{27{,}5}\right)$ *ч* до того, как его нагнал мотоциклист.

Разница во времени движения автобуса и мотоцикла равна

$$\left(\frac{2x}{165} + \frac{\frac{1}{3}x - 124}{27{,}5} - \frac{x - 124}{62}\right) \text{ч},$$

следовательно,

$$\frac{x}{55}-\frac{x}{62}=\frac{2x}{165}+\frac{\frac{1}{3}x-124}{27{,}5}-\frac{x-124}{62},$$

отсюда $x=414$ (*км*) — расстояние от K до M.

484. До остановки автомобиль ехал $11-8=3$ (*ч*), значит, он уже проехал $64\cdot 3=192$ (*км*).

Пусть расстояние от остановки до B равно x *км*, тогда все расстояние от A до B по первой дороге равно $(x+192)$ *км*. Автомобиль должен был проехать это расстояние за $\frac{192+x}{64}$ *ч*. После этой остановки он проехал $(x+31)$ *км* со скоростью 70 *км/ч* и затратил на этот путь $\frac{x+31}{70}$ *ч*, значит, на весь путь от A до B он затратил $\left(3+\frac{5}{6}+\frac{x+31}{70}\right)$ *ч*, что больше $\frac{192+x}{64}$ *ч* на $1\frac{1}{12}$ *ч*, потому

$$\frac{192+x}{64}=3\frac{5}{6}+\frac{x+31}{70}-1\frac{1}{12};\ \text{отсюда}\ x=144.$$

Автомобиль прошел $192+144+31=367$ (*км*).

485. Если скорость плота x *км/ч* (т. е. скорость течения реки), то скорость парохода в стоячей воде $(24-x)$ *км/ч*, а против течения $(24-2x)$ *км/ч*.

Плот прошел расстояние в 5 *км* $(20-15=5)$ со скоростью x *км/ч* за $\frac{5}{x}$ *ч*. Пароход прошел 15 *км* со скоростью $(24-2x)$ *км/ч* за $\frac{15}{24-2x}$ *ч*, а так как это время по условию задачи равно времени движения плота на участке в 5 *км*, то

$$\frac{5}{x}=\frac{15}{24-2x},\ \text{отсюда}\ x=4{,}8.$$

$24-4{,}8=19{,}2$ (*км/ч*) — скорость парохода в стоячей воде.

486. В 4 часа между минутной и часовой стрелками $\frac{1}{3}$ оборота, значит, ответ на вопрос задачи получается из формулы: $\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{12\cdot 60}\right)$, т. е. через $21\frac{9}{11}$ *мин* минутная стрелка догонит часовую (см. решение задачи №. 310). Можно было бы составить уравнение

$\frac{x}{12}+20=x$, где x — время, через которое совпадут стрелки.

487. Если девочки собрали всего x грибов, то, когда младшая взяла 20 штук, осталось $(x-20)$ грибов и младшая девочка взяла еще $0{,}04(x-20)$ грибов, т. е. всего $20+0{,}04(x-20)$.

После того как младшая девочка взяла грибы, осталось $[x-20-0{,}04(x-20)]$ грибов.

Когда вторая девочка взяла 21 гриб, то осталось $[x-20-0{,}04(x-20)-21]$ грибов, значит, эта девочка всего взяла $\{21+0{,}04[x-20-0{,}04(x-20)-21]\}$ грибов, а так как они получили поровну, то

$$20+0{,}04(x-20)=21+0{,}04[x-20-0{,}04(x-20)-21],$$

отсюда $x=120$.

Значит, всего собрали 120 грибов, а так как каждая получила по $20+0{,}04\cdot 100=24$ (гриба), то девочек было $120:24=5$.

488. Всего рыб было 162. Первый мальчик получил $2+0{,}1\cdot 160=18$ (рыб), а так как все получили поровну, то мальчиков было $162:18=9$ (чел.).

489. Завещание — 8100 франков, а каждый сын получил $100+0{,}1\cdot 8000=900$ (франков). Значит, сыновей было $8100:900=9$.

490. x яиц было у крестьянки. $(0{,}5x-6)$ яиц продала крестьянка первому покупателю, после чего у нее осталось $(0{,}5x+6)$ яиц.

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+6\right)-6$ продала крестьянка второму покупателю, после чего у нее осталось $0{,}5x+6-\frac{1}{6}x-2+6=$ $=\frac{1}{3}x+10$.

$0{,}25\left(\frac{1}{3}x+10\right)-6$ яиц продала крестьянка третьему покупателю. Всем трем покупателям она продала половину яиц, значит,

$$0{,}5x-6+\frac{1}{3}(0{,}5x+6)-6+0{,}25\left(\frac{1}{3}x+10\right)-6=0{,}5x.$$

Отсюда $x=54$.

Первому она продала $54\cdot 0{,}5-6=21$ (яйцо).

Второму покупателю она продала $33\cdot\frac{1}{3}-6=5$ (яиц),

Третьему покупателю она продала $28 \cdot 0{,}25 - 6 = 1$ (яйцо).

491. Пусть в автобусе было x мест для сидения, тогда в каждый из 18 автобусов вошло по $(x+5)$ человек, т. е. всего $18(x+5)$ пассажиров.

Если бы в каждый автобус входило по x человек, то понадобился бы 21 автобус $(18+3=21)$, а в них поместилось бы 21 x человек, что больше, чем было всего пассажиров $18(x+5)$ на 6 человек, значит,

$$21x - 6 = 18(x+5); \quad x = 32.$$

В автобусе было 32 места, а уезжало в каждом автобусе по 37 человек, значит, уехали всего 666 человек $(37 \cdot 18)$, а так как 174 человека разошлись пешком, то в театре было 840 зрителей $(174 + 666 = 840)$.

492. Пусть на одной чашке весов x дробинок, а на другой тогда $(195 - x)$ дробинок.

Если снять с одной чашки 11 дробинок, то для сохранения равновесия со второй чашки надо переложить 2 дробинки, значит вес 11 дробинок первой чашки равен весу 4 дробинок второй чашки.

Так как весы находились в равновесии, то число дробинок первой чашки относится к числу дробинок второй чашки, как 11 к 4, т. е.

$$\frac{x}{195-x} = \frac{11}{4}; \quad x = 143.$$

На первой чашке было 143 дробинки, а на второй $195 - 143 = 52$.

493. Пусть через x лет сумма лет детей составит 59% суммы лет отца и матери.

Через x лет детям будет $(13+x)$ лет, $(10+x)$ лет и $(6+x)$ лет, а отцу и матери вместе будет $(80+2x)$ лет. Сумма лет детей $[(13+x)+(10+x)+(6+x)]$ лет составляет от $(80+2x)$ лет 59%, т. е.

$$\frac{13+x+10+x+6+x}{80+2x} = \frac{59}{100}; \quad x = 10.$$

Отцу и матери стало $80 + 2 \cdot 10 = 100$ (лет), но так как отец старше матери на 4 года, то ему 52 года, а ей 48 лет.

494. Пусть в стакане x *куб. см* кофе. Когда Петя отпил $\frac{1}{5}x$ *куб. см*, то там осталось $\frac{4}{5}x$ *куб. см* кофе, затем он опять отпил $\frac{1}{5}$ стакана, значит, и $\frac{1}{5}$ имевшегося там кофе, т. е. он оставил после этого кофе $\frac{4}{5}$, а именно $\frac{4}{5}x \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25}x$ *куб. см*.

В третий раз он отпил $\frac{3}{5}$ стакана, т. е. осталось $\frac{2}{5}$ стакана, а значит, и $\frac{2}{5}$ имевшегося там кофе. После третьего раза в стакане осталось $\frac{32}{125}x$ *куб. см* кофе $\left(\frac{16}{25}x \cdot \frac{2}{5}\right)$.

После второго раза (чистого) кофе осталось $\frac{16}{25}x$ *куб. см*, значит, мальчик долил $\frac{9}{25}x$ *куб. см* молока $\left(x - \frac{16}{25}x = \frac{9x}{25}\right)$, а так как в третий раз осталось $\frac{2}{5}$ имевшегося в стакане кофе, то и молока осталось $\frac{18x}{125}$ *куб. см* $\left(\frac{9x}{25} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18x}{125}\right)$.

По условию задачи кофе осталось на 28 *куб. см* больше, чем осталось молока, значит,

$$\frac{32x}{125} - \frac{18x}{125} = 28; \quad x = 250.$$

495. Пусть задуманное число x. Приписав к нему справа 2, ученик получил $10x + 2$, а после прибавления 14, $10x + 16$. К этому числу приписано справа 3 и прибавлено 52, значит, получено $10(10x + 16) + 3 + 52$.

Разделив это число на 60, в частном ученик получил число $x + 6$, а в остатке $10x + x$, т. е. $11x$. На основании зависимости между делимым, делителем, частным и остатком имеем уравнение:

$$10(10x + 16) + 3 + 52 = 60(x + 6) + 11x.$$

Задуманное число $x = 5$.

496. Пусть x руб. — первоначальная сумма. За год к ней прибавится $\frac{x}{12}$ руб. и получится $\left(x + \frac{x}{12}\right)$ руб.

За второй год сумма увеличится на $\frac{1}{12}\left(x+\frac{x}{12}\right)$ руб., значит, за два года первоначальная сумма увеличится на $\left[\frac{x}{12}+\frac{1}{12}\left(x+\frac{x}{12}\right)\right]$ руб., что составит 16 900.

Из уравнения

$$\frac{x}{12}+\frac{x}{12}+\frac{x}{144}=16\,900 \text{ найдем } x=97\,344.$$

497. Пусть x — второе число, тогда первое число $0{,}92x$, если второе число увеличить на 700, то оно будет равно $(x+700)$ и разность между ними $(x+700-0{,}92x)$ составит 0,09 от $(x+700)$, значит,

$x+700-0{,}92x=0{,}09\,(x+700)$, откуда $x=63\,700$ — второе число.

$$63\,700\cdot 0{,}92=58\,604 \text{ — первое число.}$$

498. Пусть скорость мотоциклиста в гору x *км/ч*, а под гору y *км/ч*. Тогда на путь от A до B он затратил $\left(\frac{3}{x}+\frac{12}{18}+\frac{6}{y}\right)$ *ч*, что по условию задачи составляет $1\frac{7}{60}$ *ч*, значит, $\frac{3}{x}+\frac{6}{y}+\frac{12}{18}=1\frac{7}{60}$.

На обратный путь он затратил $\left(\frac{12}{18}+\frac{6}{x}+\frac{3}{y}\right)$ *ч*, что составляет $1\frac{4}{15}$ *ч*, т. е. $\frac{12}{18}+\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=1\frac{4}{15}$.

Получим систему:

$$\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{6}{y}+\frac{12}{18}=1\frac{7}{60}\\ \frac{12}{18}+\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=1\frac{4}{15}\end{cases}$$

Решив систему, получим $x=12$; $y=30$, т. е. скорость мотоциклиста в гору 12 *км/ч*, а под гору 30 *км/ч*.

499. Расстояние от A до B 330 *км*, а длина шоссе — 210 *км*.

500. Пусть расстояние от Пашково до Васильево x *км*, а от Пашково до Иваньково y *км*.

Скорость лодки по течению 12 *км/ч* $(10+2=12)$, а против течения 8 *км/ч* $(10-2=8)$.

В первый раз лодка прошла y *км* со скоростью 12 *км/ч*, т. е. затратила $\frac{y}{12}$ *ч* и $(x+y)$ *км* со скоростью

8 *км/ч*, затратив $\frac{x+y}{8}$ *ч*. Весь этот путь она прошла за $\left(\frac{y}{12}+\frac{x+y}{8}\right)$ *ч*, что по условию составляет $9\frac{1}{3}$ *ч*, значит, $\frac{y}{12}+\frac{x+y}{8}=9\frac{1}{3}$.

Во второй раз лодка прошла $(x+y)$ *км* со скоростью 12 *км/ч* и y *км* со скоростью 8 *км/ч*, т. е. на весь путь она затратила $\left(\frac{x+y}{12}+\frac{y}{8}\right)$ *ч*, что составляет 9*ч*, значит, $\frac{x+y}{12}+\frac{y}{8}=9$.

Получили систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y}{12}+\frac{x+y}{8}=9\frac{1}{3} \\ \frac{x+y}{12}+\frac{y}{8}=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x=8 \\ y=40 \end{cases}$$

501. Пусть в первом сосуде x *л* воды, во втором — y *л* воды, тогда в третьем — $(18-x-y)$ *л*.

Если из первого сосуда перелить во второй $\frac{x}{2}$ *л*, то в первом останется $\frac{x}{2}$ *л*, а во втором станет $\left(y+\frac{x}{2}\right)$ *л*. Затем из второго взяли $\frac{1}{3}$ имеющейся там воды, значит, осталось во втором $\frac{2}{3}\left(y+\frac{x}{2}\right)$ *л*. В третьем сосуде стало $\left[18-x-y+\frac{1}{3}\left(y+\frac{x}{2}\right)\right]$ *л*, но из него взяли $\frac{1}{4}$ часть, значит, там осталось $\frac{3}{4}\left[18-x-y+\frac{1}{3}\left(y+\frac{x}{2}\right)\right]$ *л*, а так как в каждом сосуде стало по 6 *л*, то $\frac{2}{3}\left(y+\frac{x}{2}\right)=6$ и $\frac{3}{4}\left[18-x-y+\frac{1}{3}\left(y+\frac{x}{2}\right)\right]=6$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}y+\frac{x}{3}=6 \\ \frac{3}{4}\left[18-x-y+\frac{1}{3}\left(y+\frac{x}{2}\right)\right]=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=8 \\ y=5 \end{cases}$$

В первом сосуде первоначально было 8 *л*, во втором — 5 *л*, в третьем тоже — 5 *л*.

502. 12 *л*; 8 *л*; 7 *л*.

503. Пусть в первом баке было x т бензина, тогда в нем останется 25 т через $\frac{x-25}{16,5}$ дней. Если во втором баке было y т, то весь бензин отпустят через $\frac{y}{11,4}$ дней, а по условию задачи $\frac{x-25}{16,5}=\frac{y}{11,4}$.

Если из первого бака опускать по 10 т ежедневно, то бензина хватит на $\frac{x}{10}$ дней.

Если же из второго бака отпускать по 6 т, то бензина хватит на $\frac{y}{6}$ дней, а по условию задачи $\frac{x}{10}=\frac{y}{6}$.

Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{x-25}{16,5}=\frac{y}{11,4} \\ \frac{x}{10}=\frac{y}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} x=190 \\ y=114 \end{cases}$$

504. Если завод в первой партии выпустил x приемников по 80 руб. и y приемников по 64 руб., то $80x+64y=5760$.

Во второй партии по 80 руб. было выпущено $\frac{x}{2}$ приемников.

В первой партии всего выпущено $(x+y)$ приемников, значит, во второй $(x+y+17)$ приемников. Приемников по 64 руб. во второй партии выпущено $\left(x+y+17-\frac{x}{2}\right)$, значит, $80\cdot\frac{x}{2}+64\left(x+y+17-\frac{x}{2}\right)=6560$.

Получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 80x+64y=5760 \\ 80\cdot\frac{x}{2}+64\left(x+y+17-\frac{x}{2}\right)=6560 \end{cases} \quad \begin{cases} x=36 \\ y=45 \end{cases}$$

В первой партии завод выпустил $36+45=81$ (приемник), во второй партии $81+17=98$ (приемников), а всего $81+98=179$ (штук).

505. Сначала найдем прибыль, которую получил магазин за два предмета $360\cdot\frac{1}{4}=90$ (руб.).

x руб. — стоимость первого предмета для магазина,

y руб. — стоимость второго предмета для магазина, тогда

$$\begin{cases} x+y=360 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{8}=90 \end{cases} \quad \begin{cases} x=120 \\ y=240 \end{cases}$$

Первый предмет продан за $120+120\cdot\frac{1}{2}=180$ (руб.), а второй за $240+240\cdot\frac{1}{8}=270$ (руб.).

506. $8+8\cdot 0{,}3=2{,}4+8=10{,}4$ (руб.) — новая цена 1 *м* первого куска.

$12+12\cdot 0{,}25=12+3=15$ (руб.) — новая цена 1 *м* второго куска.

Если за 1 принять новую стоимость всей ткани, то прежняя стоимость 1200 руб. составит $\frac{25}{32}$ новой стоимости $\left(1-\frac{7}{32}\right)$, следовательно, новая стоимость всей ткани равна $1200:\frac{25}{32}=1536$ (руб.).

Пусть в первом куске x *м*, а во втором y *м*, тогда

$$\begin{cases} 8x+12y=1200 \\ 10{,}4x+15y=1536 \end{cases} \quad \begin{cases} x=90 \\ y=40 \end{cases}$$

507. Пусть x — большее число, y — меньшее число. По смыслу задачи x и y — натуральные числа.

Если к числу x приписать справа нуль, то получим $10x$. Приписывая затем к числу $10x$ двузначное число y, получим $1000x+y$. Если к y приписать двузначное число x, то получим $100y+x$. Приписывание к нему нуля даст число $1000y+10x$.

Составим систему:

$$\begin{cases} 1000x+y=2(1000y+10x)+590 \\ 3x-4y=23 \end{cases} \quad \begin{cases} x=21 \\ y=10 \end{cases}$$

508; 509. 10^n — представляет собой число, выраженное единицей с n последующими нулями, следовательно, сумма цифр числа 10^n+8 равна 9 (а числа 10^n+2 равна 3), значит, 10^n+8 делится на 9 (а 10^n+2 — на 3), т. е.

$$\frac{10^n+8}{9} \text{ и } \frac{10^n+2}{3} \text{ — целые числа.}$$

510. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$.

Из трех последовательных чисел одно делится на 3 и хотя бы одно делится на 2, значит, произведение делится на 6.

511. $n(n+1)(2n+1) = n(n+1)(n+n+1)$.

$n(n+1)$ — произведение двух последовательных целых чисел. Из двух этих чисел одно делится на 2.

Если один из множителей произведения $n(n+1)$ делится на 3, то произведение $n(n+1)(2n+1)$ делится на 6.

Если ни одно из чисел n и $n+1$ не делится на 3, то одно из них при делении на 3 дает остаток 1, а другое 2 (так как эти числа отличаются друг от друга на 1), следовательно, их сумма $(2n+1)$ разделится на 3, т. е. $n(n+1)(2n+1)$ делится на 6.

512. а) $(2n+1)+(2n+3) = 4n+4 = 4(n+1)$; $4(n+1)$ делится на 4.

б) Число, кратное 4, может быть представлено так: $4m = (2m-1)+(2m+1)$,

$(2m-1)$ и $(2m+1)$ — нечетные последовательные числа (при целом m).

513. 1) Возьмем два числа, которые при делении на 3 дают остаток 1 (a и b — произвольные целые числа).

$$(3a+1)^2 - (3b+1)^2 = (3a+1+3b+1)(3a+1-3b-1) =$$
$$= (3a+3b+2)(3a-3b) = 3(a-b)(3a+3b+2).$$

2) Возьмем два числа, которые при делении на 3 дают остаток 2.

$$(3a+2)^2 - (3b+2)^2 = (3a+2+3b+2)(3a+2-3b-2) =$$
$$= (3a+3b+4)(3a-3b) = 3 \cdot (a-b)(3a+3b+4).$$

3) Еще возьмем два числа, из которых одно при делении на 3 дает остаток 1, а другое — остаток 2.

$$(3a+1)^2 - (3b+2)^2 = (3a+1+3b+2)(3a+1-3b-2) =$$
$$= (3a+3+3b)(3a-3b-1) = 3(a+1+b)(3a-3b-1).$$

Во всех случаях одним из сомножителей является число 3, значит, произведение делится на 3.

514. $(5a+1)^4 - (5b+2)^4 = [(5a+1)^2 - (5b+2)^2] \times$
$\times [(5a+1)^2 + (5b+2)^2] = [(5a+1)^2 - (5b+2)^2] \times$
$\times (25a^2 + 10a + 1 + 25b^2 + 20b + 4) = [(5a+1)^2 - (5b+2)^2] \times$
$\times (25a^2 + 10a + 25b^2 + 20b + 5) = [(5a+1)^2 - (5b+2)^2] \times$
$\times 5(5a^2 + 2a + 5b^2 + 4b + 1)$.

Так как один из сомножителей 5, то произведение делится на 5 (a и b — произвольные целые числа).

515. $n^5-5n^3+4n=n(n^4-5n^2+4)=n(n^4-n^2-4n^2+4)=$
$=n[n^2(n^2-1)-4(n^2-1)]=n(n^2-1)(n^2-4)=(n-2)\times$
$\times(n-1)n(n+1)(n+2)$ — это произведение пяти последовательных натуральных чисел. Среди этих чисел одно во всяком случае делится на 5, одно на 4, одно на 3 и, кроме того, хотя бы одно на 2, а это и значит, что произведение делится на 120 ($5\cdot4\cdot3\cdot2=120$).

516. $n^4-4n^3-4n^2+16n=n(n^3-4n^2-4n+16)=$
$=n[n^2(n-4)-4(n-4)]=n(n-4)(n^2-4)=$
$=(n-4)(n-2)n(n+2)$.

По условию $n=2k$; где k — натуральное число, и притом $k\geqslant3$. Тогда имеем:

$$(2k-4)(2k-2)2k(2k+2)=16(k-2)(k-1)k(k+1).$$

Среди четырех последовательных натуральных чисел одно во всяком случае делится на 4, одно на 3 и, кроме того, одно на 2. Значит, рассматриваемое произведение во всяком случае делится на $16\cdot4\cdot3\cdot2=384$.

517. $(3a\pm1)^2-1=9a^2\pm6a+1-1=3a(3a\pm2)$ делится на 3, так как один из сомножителей 3.

518. $(n-1)(n^2+3n+1-1)(n^2+3n+1+1)=$
$=(n-1)n(3+n)(n^2+3n+2)=(n-1)n(n+3)\times$
$\times(n^2+2n+n+2)=(n-1)n(n+3)[n(n+2)+(n+2)]=$
$=(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$ — произведение пяти последовательных натуральных чисел, значит, оно делится на 120 ($2\cdot3\cdot4\cdot5=120$).

519. $n^3+3n^2-n-3=n^2(n+3)-(n+3)=(n-1)\times$
$\times(n+1)(n+3)$, $n=2k+1$;

$(2k+1-1)(2k+1+1)(2k+1+3)=8k(k+1)(k+2)$
делится на 48.

520. $(2a+1)-(2m+1)=2a+1-2m-1=2a-2m=$
$=2(a-m)$, где a и m — натуральные числа.

Так как дано, что разность двух нечетных чисел делится на 5, то так как 2 не делится на 5, значит, разность натуральных чисел a и m делится на 5, но тогда $2\cdot(a-m)$ кратно 10.

$(2a+1)^3-(2m+1)^3=(2a+1-2m-1)[(2m+1)^2-$
$-(2a+1)(2m+1)+(2m+1)^2]=2(a-m)[(2m+1)^2-$
$-(2a+1)(2m+1)+(2m+1)^2]$.

$2(a-m)$ кратно 10. Следовательно, разность кубов, данных в условии нечетных чисел, всегда оканчивается нулем.

521. $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=3(n+1)^2+2$.

Слагаемое $3(n+1)^2$ делится на 3, значит, $3(n+1)^2+2$ при делении на 3 дает остаток 2.

522. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2k(2k+2)(2k+4)}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{8k(k+1)(k+2)}$.

Числитель как произведение четырех последовательных натуральных чисел делится на 24 (см. задачу № 516).

Знаменатель — произведение 8 на произведение трех последовательных чисел, т. е. на число, кратное 6 (см. задачу № 510), значит, знаменатель делится на 48, следовательно, дробь можно сократить на 24.

523. $\frac{n^4-2n^2+1-n^2}{n^4-(n^2+2n+1)}=\frac{(n^2-1)^2-n^2}{n^4-(n+1)^2}=$

$$=\frac{(n^2-1+n)(n^2-1-n)}{(n^2+n+1)(n^2-n-1)}=\frac{n^2+n-1}{n^2+n+1},$$

$n^2+n-1<n^2+n+1$, следовательно, эта дробь правильная.

524. $(n+1)^2-n^2=2n+1$.

525. $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1=(n+1)\times$
$\times(n+4)(n+2)(n+3)+1=[(n^2+5n)+4][(n^2+5n)+$
$+6]+1=(n^2+5n)^2+10(n^2+5n)+25=[(n^2+5n)+5]^2=$
$=(n^2+5n+5)^2$.

527. $(n-1)n(n+1)+n=n(n^2-1+1)=n^3$.

528а. Пусть трехзначное число $100a+10b+c$, тогда $100c+10b+a$ — число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

Разность этих чисел $100a+10b+c-100c-10b-$
$-a=99a-99c=99(a-c)=9\cdot11\cdot(a-c)=3^2\cdot11\times$
$\times(a-c)$; $11\cdot(a-c)$ не может дать квадрата числа, так как $a-c\neq11$ $(a\leqslant9,\ c\leqslant9)$.

528б. $10x+y-(10y+x)=9(x-y)$;

$x-y=1$; $x-y=4$; $x-y=9$.

529. Пусть $x(x+1)(x+2)$ — искомое число.

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{x}+\frac{x(x+1)(x+2)}{x+1}+\frac{x(x+1)(x+2)}{x+2}=74.$$

$(x+1)(x+2)+x(x+2)+x(x+1)=74$;

$x^2+2x-24=0$;

$x_1=4$; $x_2<0$. Искомое число $4\cdot5\cdot6=120$.

530. Так как каждое из чисел делится на 24, то их можно представить как $24a$ и $24b$.

$$24a + 24b = 168.$$

$a + b = 7$, следовательно, 24 содержится в одном числе 1 раз, 2 раза или 3 раза, а в другом тогда 6 раз, 5 раз или 4 раза, т. е. искомые числа 24 и 144; 48 и 120; 96 и 72.

531. Если от 4373 отнять 8, а от 826 соответственно 7, то получим числа 4365 и 819, которые делятся без остатка на одно и то же число. Чтобы найти это число, надо каждое из этих чисел разложить на простые множители: $819 = 7 \cdot 9 \cdot 13$; $4365 = 5 \cdot 9 \cdot 17$. Числа имеют два общих делителя 3 и 9. Условию задачи удовлетворяет только 9, так как $9 > 8$ и $9 > 7$.

532. I способ

Пусть $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, умножим обе части равенства на bd, получим:

$ad - bc = ac$, разделим обе части равенства на ac: $\frac{d}{c} - \frac{b}{a} = 1$, т. е. мы получили, что если разность дробей равна их произведению, то разность дробей, обратных данным, равна 1.

Например, $5\frac{1}{7} - 4\frac{1}{7} = 1$; иначе $\frac{36}{7} - \frac{29}{7} = 1$, значит, разность им обратных дробей $\frac{7}{29}$ и $\frac{7}{36}$ удовлетворяет условию задачи, действительно,

$$\frac{7}{29} - \frac{7}{36} = \frac{49}{29 \cdot 36}; \quad \frac{7}{29} \cdot \frac{7}{36} = \frac{49}{29 \cdot 36}.$$

II способ

Пусть $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, т. е. $\frac{ad - bc}{bd} = \frac{ac}{bd}$.

Так как знаменатели равных дробей равны, то равны и числители: $ad - bc = ac$, откуда $(a + b)c = ad$ и, окончательно,

$\frac{c}{d} = \frac{a}{a+b}$. Вывод. Если $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, то первая дробь может быть произвольной, числитель второй равен числителю первой, а знаменатель второй равен сумме числителя и знаменателя первой.

Обратно: если даны две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}=\frac{a}{a+b}$, то $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. Действительно, $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}-\frac{a}{a+b}=$

$=\frac{a^2+ab-ab}{b(a+b)}=\frac{a^2}{b(a+b)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$.

Примечание. Имея в виду основное свойство дроби, c может равняться ak, тогда $d=(a+b)k$, где k — произвольное натуральное число.

Примеры: $\frac{8}{3}-\frac{8}{3+8}=\frac{8}{3}-\frac{8}{11}=\frac{8}{3}\cdot\frac{8}{11}$;

$$\frac{5}{7}-\frac{5\cdot4}{12\cdot4}=\frac{5}{7}-\frac{20}{48}=\frac{240-140}{7\cdot48}=\frac{5}{7}\cdot\frac{20}{48}.$$

533. I способ

Пусть $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, умножим обе части равенства на bd $ad+bc=ac-$ и разделим обе части на ac, получим: $\frac{d}{c}+\frac{b}{a}=1$, т. е. получили, что сумма дробей, обратных искомым, равна 1.

Возьмем две дроби, сумма которых равна 1, например, $\frac{11}{13}+\frac{2}{13}=1$; тогда им обратные дроби $\frac{13}{11}$ и $\frac{13}{2}$ удовлетворяют условию задачи, действительно,

$$\frac{13}{11}+\frac{13}{2}=\frac{169}{22};\quad \frac{13}{11}\cdot\frac{13}{2}=\frac{169}{22}.$$

II способ

Рассуждая так же, как и при решении предыдущей задачи (см. II способ), получим необходимое и достаточное условие, при котором сумма двух дробей равна их произведению: одна дробь — произвольная, больше 1 $\left(\frac{a}{b}>1\right)$, другая $\frac{c}{d}=\frac{a}{a-b}$, или $\frac{c}{d}=\frac{ak}{(a-b)k}$.

Примеры: $\frac{7}{5}+\frac{7}{2}=\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{2}$,

$$\frac{9}{5}+\frac{63}{28}=\frac{252+315}{5\cdot28}=\frac{567}{5\cdot28}=\frac{9\cdot63}{5\cdot28}.$$

534. Дана дробь $\frac{a}{b}$; прибавим к числителю m, а к знаменателю n, величина дроби не должна измениться:

$$\frac{a}{b}=\frac{a+m}{b+n};\quad ab+an=ab+bm;\quad an=bm.$$

$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$, т. е. к числителю можно прибавить $m=k\cdot a$, а к знаменателю $n=k\cdot b$, где k — натуральное число.

535. I способ

Пусть будут дроби $\frac{a}{x}$ и $\frac{b}{y}$; тогда их сумма $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{ay+bx}{xy}$, а произведение $\frac{ab}{xy}$, а так как сумма должна быть в 7 раз больше произведения, то $\frac{ay+bx}{xy}=\frac{7ab}{xy}$; $ay+bx=7ab$, разделим обе части равенства на ab, получим $\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=7$, т. е. сумма дробей, обратных данным, должна быть равной 7.

Возьмем два произвольных числа, сумма которых равна 7.

$$a)\ 2+5=7;$$

$$b)\ 2\frac{1}{4}+4\frac{3}{4}=7.$$

Числа, им обратные, удовлетворяют условию задачи, т. е.

$$a)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10};\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10},$$

что меньше $\frac{7}{10}$ в 7 раз.

$$b)\ \frac{4}{9}+\frac{4}{19}=\frac{4\cdot 28}{9\cdot 19};\quad \frac{4}{9}\cdot\frac{4}{19}=\frac{4\cdot 4}{9\cdot 19}.$$

II способ

Применяя метод решения задач № 532; 533 (II способ), получим: первая дробь $\frac{a}{b}$ — произвольная, удовлетворяющая условию $7a>b$, вторая $\frac{c}{d}=\frac{a}{7a-b}=\frac{ak}{(7a-b)k}$.

Пример: $\frac{3}{11}+\frac{3}{3\cdot 7-11}=\frac{3}{11}+\frac{3}{10}=\frac{63}{110}$,

$\frac{3}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{9}{110}$, что меньше $\frac{63}{110}$ в 7 раз.

536. 1. См. решение задачи № 308.

2. Пусть $100\,000+x$ — искомое число, тогда $(100\,000+x)\cdot 3=10x+1$, откуда $x=42\,857$, значит, искомое число 142 857.

537. $\frac{nx+ny}{nx-ny}=\frac{n(x+y)}{n(x-y)}=$

$=\frac{x+y}{x-y}=A.$

Если в дроби $\frac{x+y}{x-y}$ каждое из чисел x и y умножить на n, то величина дроби не изменится.

$$\frac{xnyn+pnyn+pnxn}{xn+yn+pn}=$$

$$=\frac{xyn^2+pyn^2+pxn^2}{n(x+y+p)}=$$

$$=\frac{n^2(xy+py+px)}{n(x+y+p)}=$$

$$=\frac{n(xy+py+px)}{x+y+p},$$

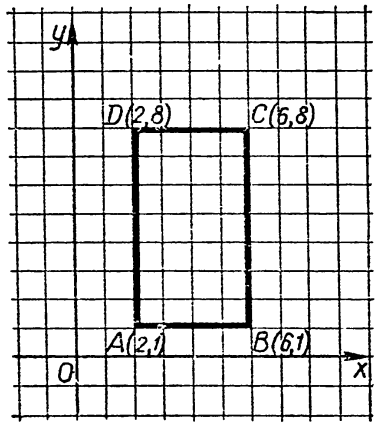


Рис. 63

значит, если у дроби $\frac{xy+py+px}{x+y+p}$ каждое из чисел x, y и p умножить на n, то новая дробь будет равной nB. $\frac{n^3x^3}{n^2p^2}=\frac{nx^3}{p^2}$, т. е. если в дроби $\frac{x^3}{p^2}$ каждое из чисел x и p умножить на n, то новая дробь будет равна nC.

538. $AB=6-2=4$ (ед.); $AB=2$ *см* (рис. 63), $CB=8-1=7$ (ед.); $CB=3{,}5$ *см*, $S_{ABCD}=2\cdot 3{,}5=7$ ($см^2$).

539. $AD=7-2=5$ (ед.) (рис. 64).

$$AD=2{,}5\ см,\quad AB=4\ см,$$

$$AB=11-3=8\ (ед.).$$

$$S_{ABCD}=4\cdot 2{,}5=10\ (см^2).$$

540. $\frac{a-1}{b-1}=\frac{1}{2}$; $b=2a-1$; $a=2,\ 3,\ \ldots$

541. Из условия следует, что $10a+b=3ab$; где a и b — натуральные числа, причем однозначные.

Отсюда $a=\frac{b}{3b-10}$. Подбором находим, что искомые числа 15 и 24.

542. Квадрат двузначного числа $(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2=2a(5a+b)\cdot 10+b^2$.

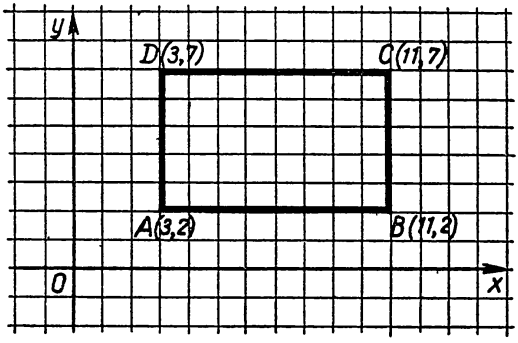


Рис. 64

Первое слагаемое — четное число десятков, значит, и b^2 должно содержать четное число десятков, т. е.

$0\leqslant b^2<10$, откуда $b=0$; $b=1$; $b=2$; $b=3$;

$20<b^2<30$, откуда $b=5$;

$40<b^2<50$, откуда $b=7$;

$60<b^2<70$, откуда $b=8$;

$80<b^2<90$, откуда $b=9$.

Значит, цифрой единиц двузначного числа может быть 0; 1; 2; 3; 5; 7; 8; 9.

543. Пусть дано двузначное число $10a+b$, тогда его квадрат $100a^2+20ab+b^2$. Так как число десятков — число нечетное, то

$10<b^2<20$, откуда $b=4$;

$30<b^2<40$, откуда $b=6$;

$50<b^2<60$, нет значения b;

$70<b^2<80$, такого значения b нет, так как b натуральное. Значит, при $b=4$ и при $b=6$ квадрат двузначного числа содержит нечетное число десятков.

544. Пусть число $\overline{ab0d}$, где $d=a-b$; $1000a+100b+d=1000a+100b+a-b=1001a+99b=11(91a+9b)$. По смыслу задачи $a\neq 0$.

$11(91a+9b)$ будет точным квадратом, если $91a+9b$, где a и b — однозначные числа, равно произведению 11 на квадрат какого-либо числа. Из значений $a=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ только при $a=9$ получим $11\cdot(91\cdot 9+9b)=99(91+b)$, откуда следует, что $b=8$; $99(91+8)=99^2$. Искомое число 9801.

545. 1089 и 3025.

546. Пусть сумма цифр одного числа равна 232, а сумма цифр другого, следующего за ним числа 116, так как первое число меньше второго на 1, т. е. от прибавления 1 к меньшему числу его сумма цифр изменится (уменьшится) на 116. Это может быть в том случае, если на конце числа стоят девятки, и их должно быть 13, так как сумма цифр всех этих девяток равна 117, значит, перед девятками должны быть любые цифры, но их сумма должна быть равна 115 (на 1 меньше, чем 116). Например,

$$9999999999979999999999999$$

и

$$9999999999980000000000000.$$

Ответ. Любые два числа, на конце одного 13 девяток, а сумма остальных цифр на 1 меньше числа, делящегося на 116, тогда другое число оканчивается на 13 нулей, а сумма его цифр делится на 116.

547. Да, на конце одного из них стоит 14 девяток, а впереди стоят любые цифры, сумма которых равна 124 или любому числу, которое при делении на 125 дает остаток 124, тогда на конце следующего числа, на единицу большего, чем первое, будет стоять 14 нулей. Например,

$$99999999999979999999999999$$

и

$$99999999999980000000000000.$$

548. Заметим, что из второго уравнения следует, $y>x$.

$$\begin{cases} z=2x+2y; \\ z=3y-3x; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{z-2x}{2}; \\ z=3y-3x; \end{cases}$$

$$z=\frac{3(z-2x)}{2}-3x; \qquad z=12x; \qquad z>x.$$

549. Так как $z>0$, то $x+y<28$, отсюда:

$$\begin{cases} x+y<28; \\ 2x-y=32; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y<28; \\ y=2x-32. \end{cases}$$

$x+2x-32<28$; $x<20$, но $x+y<28$, поэтому

$y=2x-32>0$, $x>16$, $16<x<20$;

$y<28-x$; $8<y<12$; отсюда $x>y$.

550. Да, его внешние углы 108°, 108°, 72°, 72° (равнобедренная трапеция).

551. Сумма внутренних углов многоугольника $2d(n-2)$, а сумма внешних углов $4d$, значит, $\frac{2d(n-2)}{4d}=\frac{15}{4}$, откуда $n=9{,}5$; число сторон не может быть дробным, значит, такого многоугольника не может быть.

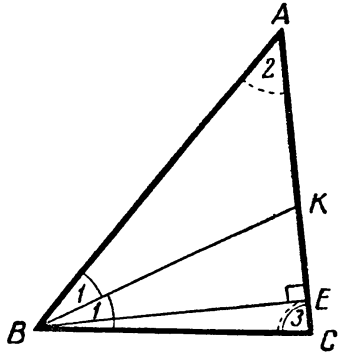


Рис. 65

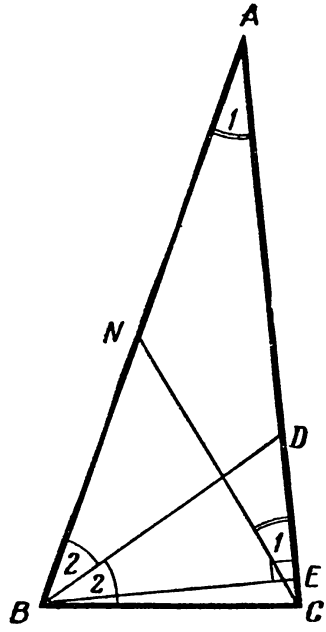


Рис. 66

552. (Рис. 65.) $\angle 1+\angle 2=70°$ ($\angle BKE$ — внешний к $\triangle ABK$). $\angle 1+\angle 3=110°$ (из $\triangle BKC$), значит, $\angle 3-\angle 2=40°$.

553. (Рис. 66.) 1) $\angle BCA-\angle A=60°=\angle BCN$.

2) $\angle BNC=180°-60°-2\angle 2=120°-2\angle 2$.

3) $\angle BNC$ внешний к $\triangle ANC$; значит, $\angle BNC=2\angle 1$, $120°-2\angle 2=2\angle 1$, отсюда $\angle 1+\angle 2=60°$.

4) $\triangle BDC$; $\angle D=180°-(\angle 2+60°+\angle 1)=60°$. $DE=0{,}5\,BD=5$ (*см*).

554. Пусть дана трапеция $ABCD$ (рис. 67). Проведем $ED\parallel AC$ до пересечения с продолжением BC

в точке E. В треугольнике BED стороны равны 3 *см*, 4 *см* и 5 *см*, значит, $\angle BDE = 90°$, поэтому и $\angle AOD = 90°$,

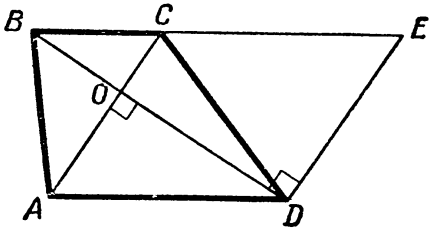


Рис. 67

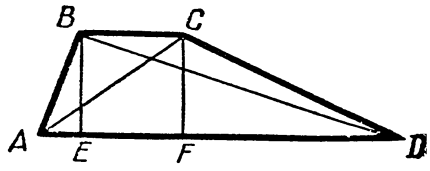


Рис. 68

т. е. диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. $S_{ABCD} = 0{,}5\, AC \cdot BD = 6$ (*кв. см*).

555. 30 *кв. см.*

556. (рис. 68.) 1) $\triangle ACF$; $AF = 8$.

2) $\triangle BED$; $ED = 112$.

3) $AF + ED = BC + AD = 120$.

4) $S_{ABCD} = 900$ (*кв. ед.*).

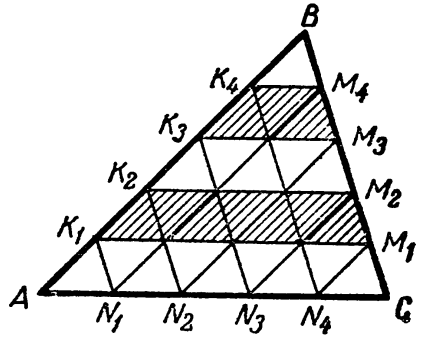


Рис. 69

557. I способ.

Треугольник ABC (рис. 69) разбит на 25 равных, значит, равновеликих треугольников, поэтому площадь каждого из них $\frac{1}{25} S_{ABC} = \frac{1}{25} \cdot \frac{24 \cdot 25}{2} = 12$ (*кв. см*); $S_{K_1K_2M_2M_1} + S_{K_3K_4M_4M_3} = 7 \cdot 12 + 3 \cdot 12 = 120$ (*кв. см*).

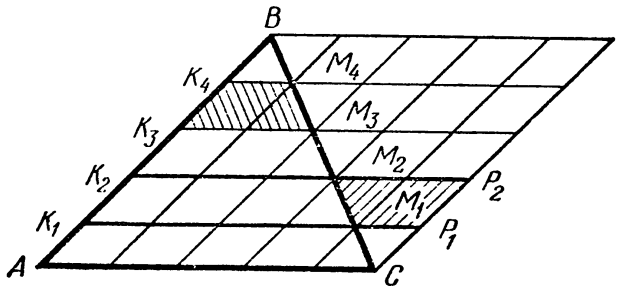


Рис. 70

II способ.

Достраиваем данный треугольник до параллелограмма (рис. 70), тогда нетрудно доказать, что площадь

$K_3K_4M_4M_3$ равна площади $M_1M_2P_2P_1$, а, значит, искомая площадь равна площади $K_1K_2P_2P_1$.

$$S_{\text{искомая}} = 0{,}2S_{\text{паралл}} = \frac{24 \cdot 25}{5} = 120 \text{ (кв. см)}.$$

III способ. (Рис. 71.)

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot H_b}{2} = \frac{24 \cdot 25}{2} = 300.$$

Расстояние между параллельными прямыми AC, K_1M_1 и т. д. равно 5 *см*. Нетрудно убедиться, что K_4M_4 в 2 раза меньше, чем K_3M_3, а отрезок K_2M_2 в 3 раза

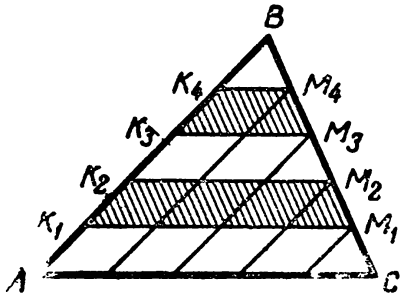


Рис. 71

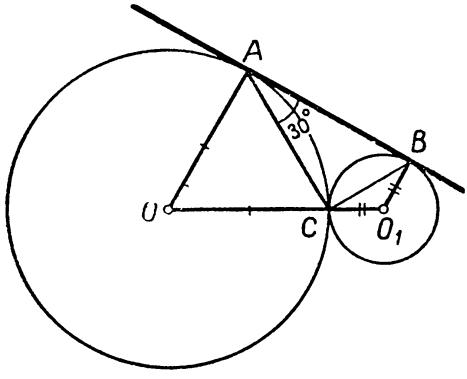


Рис. 72

больше K_4M_4 (из точек деления BC следует провести прямые, параллельные AB), поэтому

$K_4M_4 = 24 : 5 = 4{,}8$ (*см*), тогда $K_3M_3 = 9{,}6$ *см*, $K_2M_2 = 14{,}4$ *см*, $K_1M_1 = 19{,}2$ *см*.

$$S_{K_1K_2M_2M_1} + S_{K_3K_4M_4M_3} = \frac{4{,}8 + 9{,}6}{2} \cdot 5 + \frac{19{,}2 + 14{,}4}{2} \cdot 5 = 120 \text{ (кв. см)}.$$

558. $AO \perp AB$ (рис. 72), значит, $\angle OAC = 60°$, т. е. $\triangle OAC$ равносторонний, следовательно, $\angle AOC = 60°$, а $\angle BO_1C = 120°$ (односторонние при $AO \parallel BO_1$), $\angle ACB = 180° - (\angle OCA + \angle BCO_1) = 90°$. Значит, CB — наименьшая сторона прямоугольного треугольника ABC, $\angle BAC = 30°$, значит, $BC = 0{,}5AB$; $AB = 30$ *см*.

559. Пусть $\angle A' = \alpha$, $\angle B' = \beta$, $\angle C' = \gamma$ (рис. 73), тогда $\smile C'mA' = 2\beta$, а $\smile A'B'C' = 360° - 2\beta$.

$$\angle ABC = \frac{360° - 2\beta - 2\beta}{2} = 180° - 2\beta.$$

Аналогично, $\angle BAC = 180° - 2\alpha$; $\angle ACB = 180° - 2\gamma$.

560. $\angle A = \angle CBE = \alpha$. ($\angle A$ вписанный; $\angle CBE$ составлен касательной и хордой), $\angle ACB = \gamma$ (рис. 74). $\angle E = \gamma - \alpha$ по свойству внешнего угла.

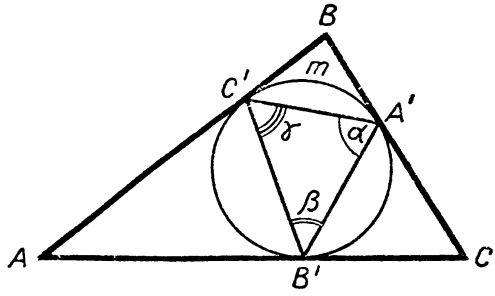


Рис. 73

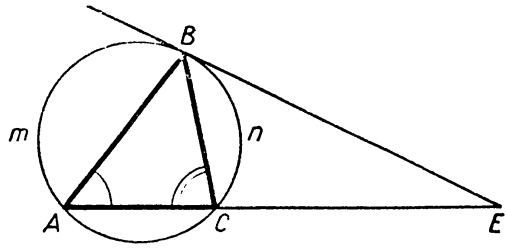


Рис. 74

561. Соединим данные точки P, Q и R (рис. 75). Отрезки PQ, QR и PR — средние линии искомого треугольника, поэтому через точки P, Q и R проводим

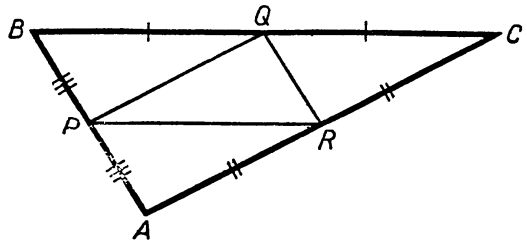


Рис. 75

прямые, соответственно параллельные QR, PR и PQ. Полученный треугольник ABC искомый.

562. Разделим AB пополам: $AK = KB$ (рис. 76). Проведем $KL \parallel BC$ и $KM \parallel AC$. Точки M и L — середины соответственно BC и AC, значит, AM и BL — медианы.

563. Строим треугольник ABC_1, симметричный треугольнику ABC относительно AB (рис. 77). В треугольнике ABC_1 строим точку пересечения медиан, затем

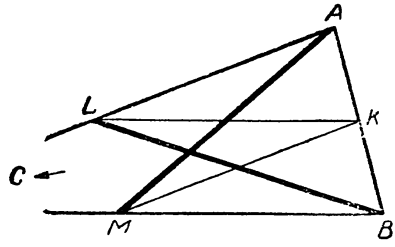


Рис. 76

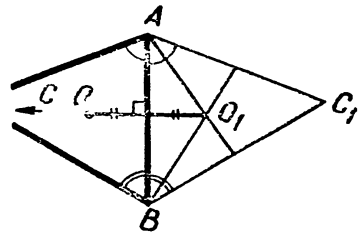


Рис. 77

строим точку, ей симметричную относительно AB. Прямая, соединяющая эти две точки, и будет искомой.

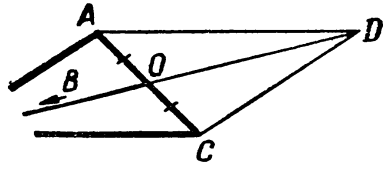


Рис. 78

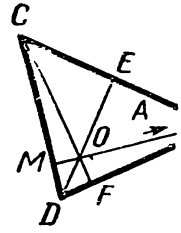


Рис. 79

564. Проведем $AD \parallel BC$ и $CD \parallel AB$ (рис. 78). Разделим AC пополам ($AO = OC$). Соединим O с D и продолжим за точку O, это и будет медиана к AC.

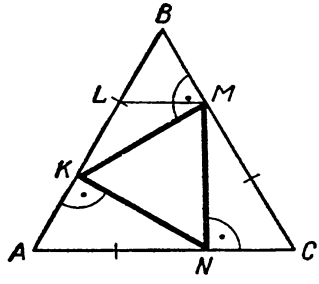


Рис. 80

565. Пусть точка A недоступна (рис. 79). Соединим C и D. В треугольнике ADC проведем высоты CF и DE соответственно на стороны AD и AC. Из точки O — пересечения высот опустим перпендикуляр на CD, получим MO, это и есть искомая высота.

566. Предположим, что задача решена и $\triangle KMN$ искомый (рис. 80), тогда $\angle BKM = 180° - (\angle AKN + \angle NKM) = 30°$. $\triangle KBM$ прямоугольный, значит, $BM = 0{,}5\ KB$, а так как $\triangle AKN = \triangle KBM$, то $BM = AK = 0{,}5\ KB$, значит, $AK = \frac{1}{3} AB$.

Строим $AK = NC = BM = \frac{1}{3} AB$, точки K, M и N соединим, $\triangle KMN$ — искомый.

Покажем, что стороны $\triangle KMN$ перпендикулярны к сторонам $\triangle ABC$.

$BL = LK = \frac{1}{3} AB$. Рассмотрим $\triangle LBM$: $\angle B = 60°$, $BL = BM = \frac{1}{3} AB$, значит, $\triangle LBM$ — равносторонний, отсюда $\angle BLM = 60°$, поэтому $\angle KLM = 120°$, а так как $KL = LM = \frac{1}{3} AB$, то $\angle LMK = 30°$, следовательно, $\angle KMB = 60° + 30° = 90°$, т. е. $KM \perp CB$.

Аналогично $MN \perp AC$ и $KN \perp AB$.

II способ (метод подобного преобразования) (рис. 81).

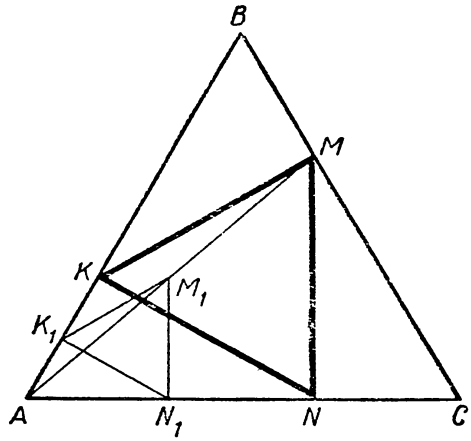


Рис. 81

567. Проведем BD — биссектрису $\angle ABC$ (рис. 82). Из точки D проведем $ED \parallel BC$ и $DF \parallel AB$. $BFDE$ — искомый ромб.

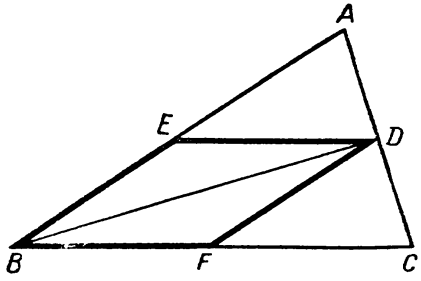


Рис. 82

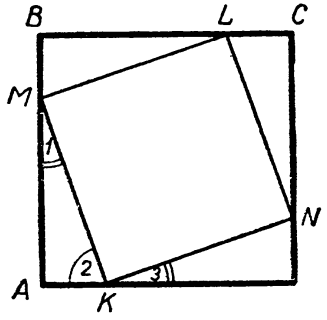


Рис. 83

568. Отложим отрезки $CL = DN = AK = BM$ и полученные точки M, L, N и K соединим (рис. 83).

$KMLN$ — искомый квадрат.

$$\triangle MBL = \triangle NLC = \triangle KND = \triangle AMK$$

(прямоугольные треугольники по двум катетам):

$MB = LC = ND = AK$ — по построению,

$BL = CN = KD = AM$, так как $AB = BC = AD = CD$. Значит, $ML = LN = KN = KM$, т. е. $KMLN$ — ромб.

$\angle 1 + \angle 2 = 90°$. $\angle 1 = \angle 3$ (из равенства треугольников AKM и KND), следовательно, $\angle 2 + \angle 3 = 90°$, т. е. $\angle MKN = 90°$, значит, $KMLN$ — квадрат.

569. Предположим, что задача решена, т. е. $DE \parallel AC$ и $AD + EC = DE$ (рис. 84). Отложим $DO = AD$, тогда $OE = EC$. В $\triangle ADO$: $\angle DAO = \angle DOA = \angle OAC$.

Следовательно, AO — биссектриса угла BAC. Аналогично CO — биссектриса угла BCA.

Проведем биссектрисы углов A и C до их взаимного пересечения в точке O. Через точку O проведем $DE \parallel AC$.

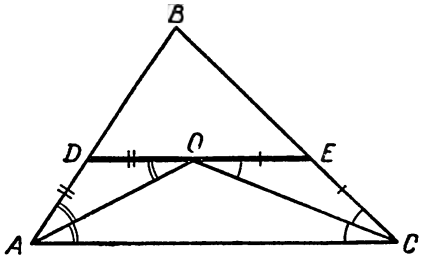


Рис. 84

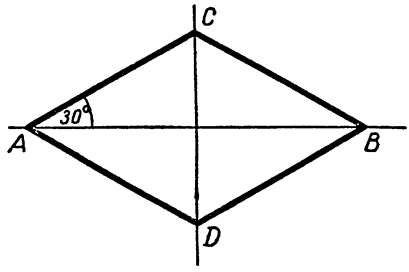


Рис. 85

Теперь нетрудно доказать, что DE — искомая прямая. Действительно, $AD = DO$ ($\angle DOA = \angle OAC = \angle DAO$) и $OE = EC$ ($\angle EOC = \angle OCA = \angle OCE$), значит, $DE = AD + CE$.

Задача имеет единственное решение и всегда возможна.

570. Соединим данные точки A и B (рис. 85). Построим равнобедренный $\triangle ABC$ по основанию AB и углам при основании, равным 30°. Полученный треугольник ABC достроим до ромба.

$ACBD$ — искомый ромб, у которого $CD = AC$.

571. Делим $\cup AB$ (рис. 86) пополам ($\cup AD = \cup DB$). Из полученной точки D опускаем на l перпендикуляр, точка пересечения его с окружностью и является искомой точкой C.

Так как $\cup AD = \cup DB$, то $\angle ACD = \angle DCB$ и $\angle KCM = \angle MCL$, $CM \perp KL$, значит, $\triangle KMC = \triangle MCL$, следовательно, $\angle CKM = \angle CLM$.

572. Пусть точка M — данная точка на окружности, из которой надо провести касательную (рис. 87).

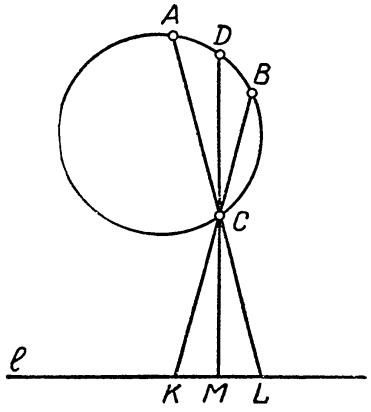


Рис. 86

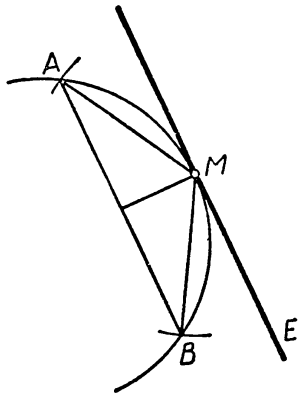
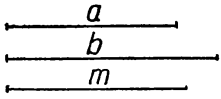


Рис. 87

С центром в точке M произвольным (не большим диаметра данной окружности) радиусом проведем дуги до пересечения с дугой данной окружности в точках A и B. Середину AB соединим с точкой M и через M проведем прямую ME, параллельную AB, ME — искомая касательная.

573. Анализ. Пусть $\triangle ABC$ искомый (рис. 88),



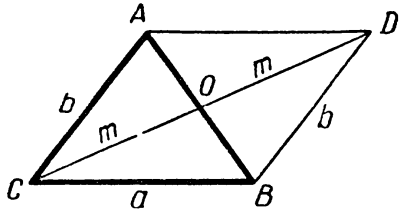


Рис. 88

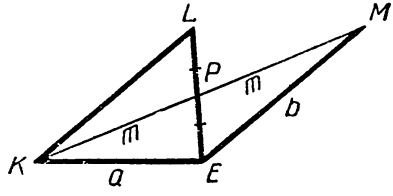


Рис. 89

тогда $AC = b$; $BC = a$; $CO = m$; CO — медиана. Продолжим CO за точку O на отрезок OD, равный CO, и полученную точку D соединим с B и A. В треугольнике CBD $BC = a$, $BD = b$, $CD = 2m$.

Построение. Строим треугольник KME по трем сторонам (рис. 89): $KE = a$, $ME = b$, $KM = 2m$. Затем

точку P — середину KM — соединяем с E и продолжаем на отрезок $PL = PE$. Точки K и L соединяем. Треугольник KLE искомый.

Задача имеет единственное решение и возможна, если существует треугольник KME, т. е. если для отрезков a, b, $2m$ верно соотношение: каждый из них меньше суммы двух других и больше их разности.

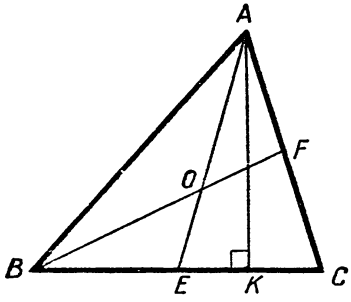


Рис. 90

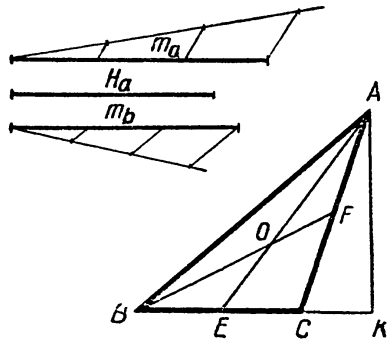


Рис. 91

574. Анализ. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника AEK по катету AK, равному H_a, и гипотенузе AE, равной m_a (рис. 90).

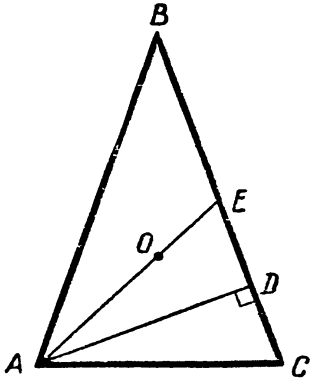


Рис. 92

Построение. Строим прямоугольный треугольник AEK (рис. 91): OE — треть от m_a. С центром в точке O и радиусом равным $\frac{2}{3}m_b$ проводим дугу до пересечения с прямой EK в точке B. Отложим $EC = BE$. Треугольник ABC искомый.

Можно было для построения данного треугольника продолжить медиану BF за точку F на отрезок, равный m_b, и строить прямоугольный треугольник по катету, равному H_a, и гипотенузе, равной $2m_b$.

575. Анализ. Пусть треугольник ABC (рис. 92) искомый и AD и AE — данные высота и медиана. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника AED по катету AD, равному данной высоте, и гипотенузе AE, равной данной медиане.

Построение. Строим прямоугольный треугольник AED (рис. 93). OE — треть AE. С центром в точке O и радиусом AO проводим дугу до пересечения с ED в точке C. Получаем AC — основание равнобедренного треугольника. К AC проводим срединный перпендикуляр до пересечения с ED в точке B. Треугольник ABC искомый. Задача возможна, если $H < m$.

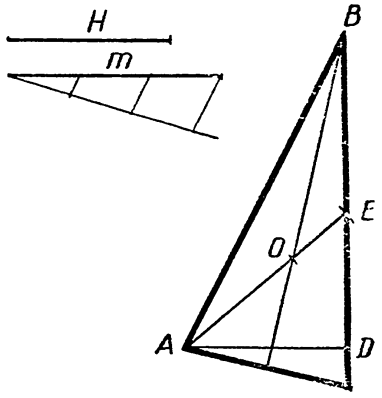


Рис. 93

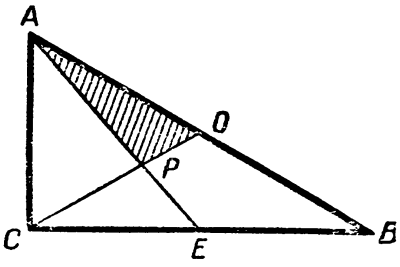


Рис. 94

576. Анализ. Задача сводится к построению треугольника APO (рис. 94), где AO — половина гипотенузы или отрезок, равный CO; $PO = \frac{1}{3} CO$; $AP = \frac{2}{3} AE$.

Построение. Строим треугольник APO по трем сторонам: $AO = m_c$; $PO = \frac{1}{3} m_c$ и $AP = \frac{2}{3} m_a$. Продолжаем PO за точку P на отрезок CP, равный $\frac{2}{3} m_c$, отрезок AP за точку P на отрезок PE, равный $\frac{1}{3} m_a$, а отрезок AO за точку O на отрезок OB, равный AO. Треугольник ABC искомый.

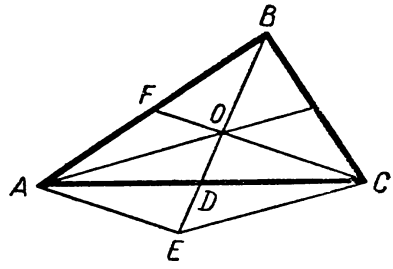


Рис. 95

577. Анализ. Пусть треугольник построен (рис. 95). Продолжим медиану, например, BD на $\frac{1}{3}$ ее (за точку D) и полученную точку E соединим с A и C. Так как $AD = DC$ и $OD = DE$, то $AE = OC = \frac{2}{3} FC$.

В треугольнике AOE каждая сторона равна $\frac{2}{3}$ одной из медиан искомого треугольника.

Построение. Строим $\triangle KLM$ (рис. 96) по трем сторонам $\left(KM=\frac{2}{3}m_1,\ KL=\frac{2}{3}m_3,\ ML=\frac{2}{3}m_2\right)$.

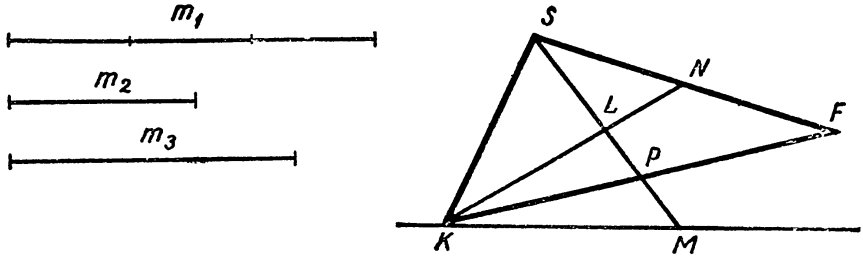


Рис. 96

Продолжаем KL на отрезок $LN=\frac{1}{3}m_3$.

ML делим пополам в точке P и от точки P откладываем $PS=m_2$. SN пересекает KP в точке F, K соединим с S. $\triangle SKF$ — искомый. Задача имеет решение и единственное, если из отрезков $\frac{2}{3}m_1$, $\frac{2}{3}m_2$ и $\frac{2}{3}m_3$ можно построить треугольник.

578. Предположим, что треугольник построен, тогда, если основание продолжить в обе стороны на отрезки, равные его боковым сторонам, и полученные точки соединить с вершиной данного треугольника, то нетрудно построить полученный таким образом треугольник (основание — периметр, а углы соответственно равны $\frac{1}{2}$ внутренних углов).

Построение (рис. 97). Строим треугольник CKD по стороне CD, равной $2p$, и двум прилежащим к ней углам $\left(\angle C=\frac{1}{2}\angle A;\ \angle D=\frac{1}{2}\angle B\right)$. Через середины отрезков CK и KD проводим к ним перпендикуляры до пересечения с CD в точках L и M.

$\triangle LMK$ — искомый. Задача имеет единственное решение, если $A+B<180°$ и, значит, $\frac{A+B}{2}<90°$.

579. На прямой отложим отрезок $AB = c$ (рис. 98). Проведем прямую DE, параллельную AB и находящуюся от нее на расстоянии, равном h_c.

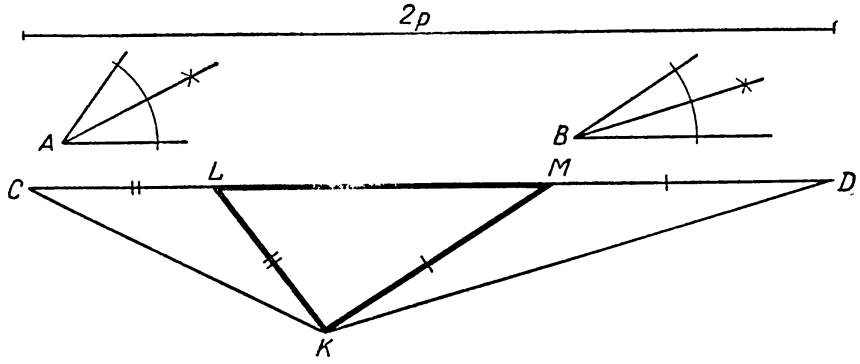


Рис. 97

Из точки O (середины AB) проведем дугу радиусом m_c и до пересечения с DE в точке C. $\triangle ACB$ — искомый.

Задача имеет решение, если $m_c \geqslant h_c$. При $m_c = h_c$ $\triangle ABC$ — равнобедренный.

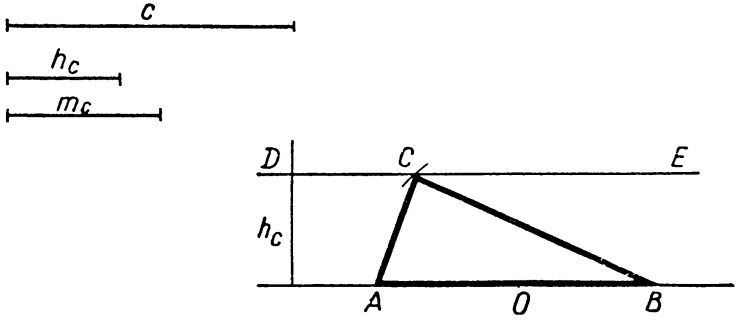


Рис. 98

580. Указание. Сначала можно построить прямоугольный треугольник по гипотенузе (h_b) и катету $\left(\frac{1}{2} h_a\right)$, затем симметричный ему, относительно гипотенузы. (Рис. 99.)

581. 1) $\angle C$ — острый. Строим прямоугольный треугольник CBK (рис. 100) по катету KB, равному h_b, и острому углу C, тогда сторона CB является стороной искомого треугольника (a). Строим отрезок $CE = 2p - a$.

Срединный перпендикуляр к BE пересекает CE в точке A. Треугольник ABC — искомый.

2) $\angle C$ — тупой. Прямоугольный треугольник CBK строится по катету h_b и углу $180° - \angle C$.

3) $\angle C = 90°$. Тогда $h_b = BC = a$.

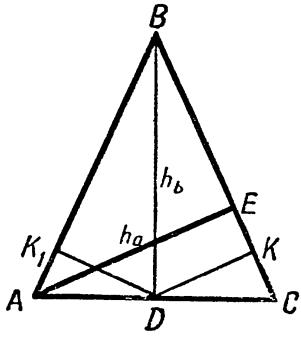


Рис. 99

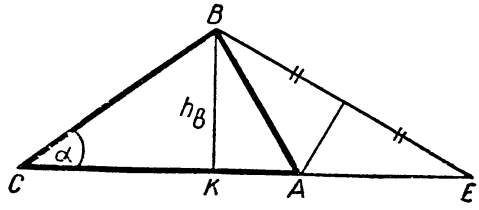


Рис. 100

582. Строим прямоугольный треугольник по катету $AN = h_a$ и гипотенузе $AD = l_A$ (рис. 101).

Затем строим $\angle DAB = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A$.

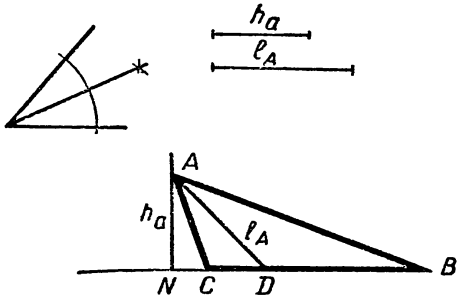


Рис. 101

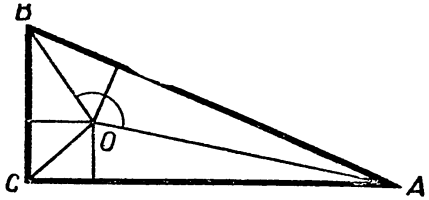


Рис. 102

$\triangle ABC$ — искомый. Задача имеет решение[1], если $h_a < l_A$ и если $\angle ADC > \frac{\angle A}{2}$.

583. I способ

Анализ. Пусть треугольник построен (рис. 102). Тогда $\angle BOA = 135°$, так как $\angle B + \angle A = 90°$, $\frac{\angle B}{2} + \frac{\angle A}{2} = 45°$. Задача сводится к построению тре-

[1] Задача имеет решение, если $l_A \cdot \sin\frac{A}{2} < h_a \leqslant l_A$.

угольника ABO по основанию (гипотенузе), углу при вершине 135° и высоте, опущенной на основание (радиус вписанного круга).

Построение (рис. 103). На $AB = c$ строим сегмент, вмещающий угол в 135°. (В этом частном случае задача решается очень просто, если доказать, что дуга искомого сегмента равна четверти окружности, описанной около квадрата со стороной AB.) На расстоянии r проводим прямую $A'B'$, параллельную AB, до пересечения

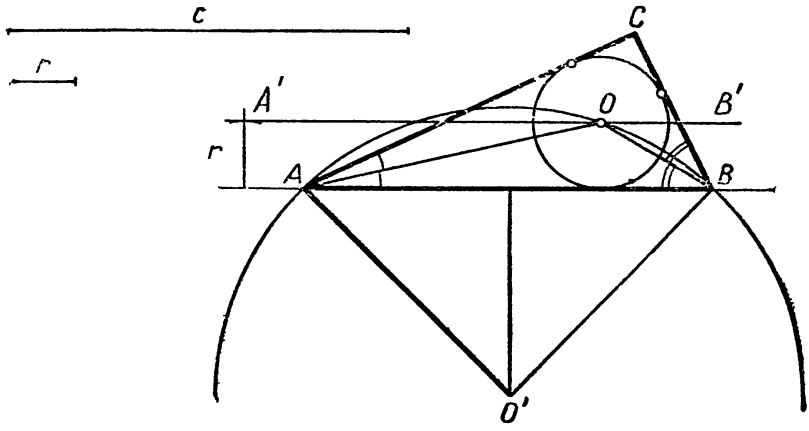


Рис. 103

с дугой сегмента. Затем с центром в полученной точке O и радиусом r проводим окружность. Соединим O с B и с A и построим $\angle OBC = \angle OBA$ и $\angle OAC = \angle OAB$. Треугольник ABC — искомый.

Если $r \leqslant H$ сегмента, то задача имеет решение ($r = H$ — треугольник равнобедренный), если $r > H$ — нет решения.

II способ

Известно, что в прямоугольном треугольнике $r = p - c$, отсюда $r = \frac{1}{2}(a + b + c) - c$ и $a + b = 2r + c$. Построение прямоугольного треугольника теперь можно свести к построению его по сумме катетов и гипотенузе. Эта задача в свою очередь сводится к построению треугольника по стороне $(2r + c)$, углу, равному 45° и прилежащему

к этой стороне, и противолежащей стороне, равной c. $\triangle DBA$ (рис. 104) построен по:

1) $DA = 2r + c$,
2) $\angle BDA = 45°$,
3) $AB = c$.

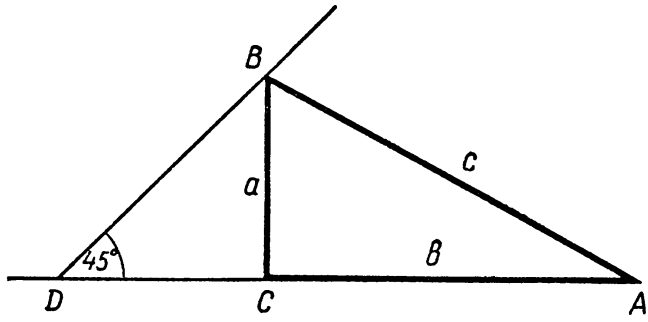


Рис. 104

$BC \perp AD$ даст искомый $\triangle ACB$. Для доказательства вычислим радиус (x) круга, вписанного в $\triangle ABC$.

$$x = \frac{1}{2}(a + b + c) - c = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}c =$$

$$= \frac{1}{2}(2r + c) - \frac{1}{2}c = r.$$

584. Высота в равнобедренном прямоугольном треугольнике равна половине гипотенузы. Значит, делим данный отрезок на три равные части, $\frac{2}{3}$ данного отрезка равны гипотенузе искомого треугольника.

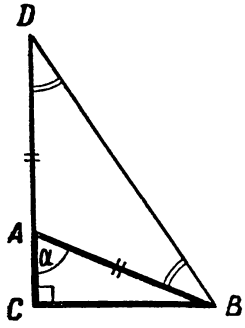


Рис. 105

585. Анализ. Пусть треугольник ABC искомый (рис. 105). Продолжим AC за точку A на отрезок AD, равный гипотенузе AB, получим отрезок DC, равный данному отрезку S. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника BCD по катету CD, равному S, и острому углу BDC, равному $0{,}5\alpha$.

586. Анализ. Пусть $\triangle ABC$ искомый (рис. 106). Продолжим катет BC за точку B на отрезок BD, равный гипотенузе AB, получим отрезок CD, равный сумме

катета с гипотенузой. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника ACD по катету CD и прилежащему к нему углу CDA, равному $45° - \frac{\alpha}{2}$ (угол ABC внешний к равнобедренному треугольнику ABD).

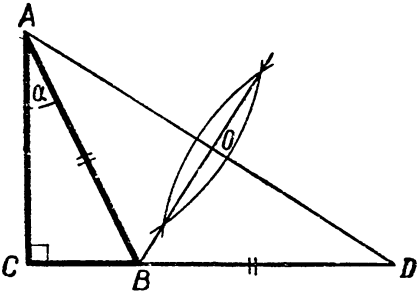


Рис. 106

587. Анализ. Пусть $ABCD$—искомый параллелограмм (рис. 107). Продолжим BC на отрезок CE, равный диагонали AC; таким образом, $BE = BC + AC$. Задача сводится к построению треугольника ABE по двум сторонам AB и BE и углу, заключенному между ними и равному $180° - \angle A$. Затем для нахождения третьей вершины параллелограмма

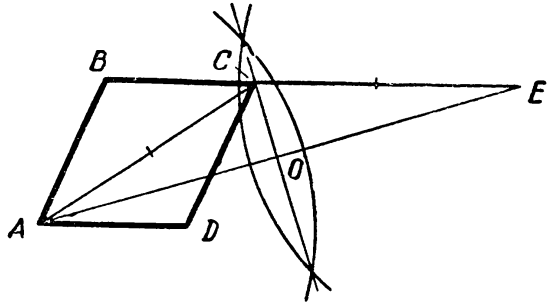


Рис. 107

надо из O — середины AE провести перпендикуляр к AE до пересечения с BE в точке C.

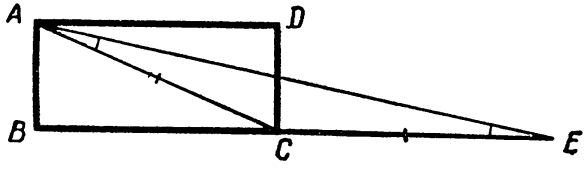


Рис. 108

588. Продолжим BC прямоугольника $ABCD$ на $CE = AC$ (рис. 108). Задача сводится к построению прямоугольного $\triangle ABE$ по катетам AB и BE. Затем строим $\angle EAC = \angle E$, т. е. получим точку C.

589. Анализ. Построим параллелограмм и рассмотрим в нем треугольник, образованный диагоналями и одной из сторон его.

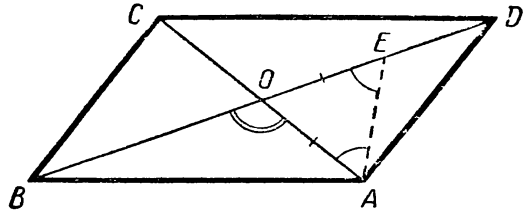


Рис. 109

Отложим на DO (рис. 109) отрезок $OE = OA$ и соединим точку E с A. $\angle BOA$ — внешний к $\triangle OAE$, следовательно, $\angle E = \frac{1}{2} \angle BOA$. Задача сводится к построению $\triangle ABE$ по двум сторонам AB и BE (данная и полусумма диагоналей) и углу BEA, противоположному данной стороне.

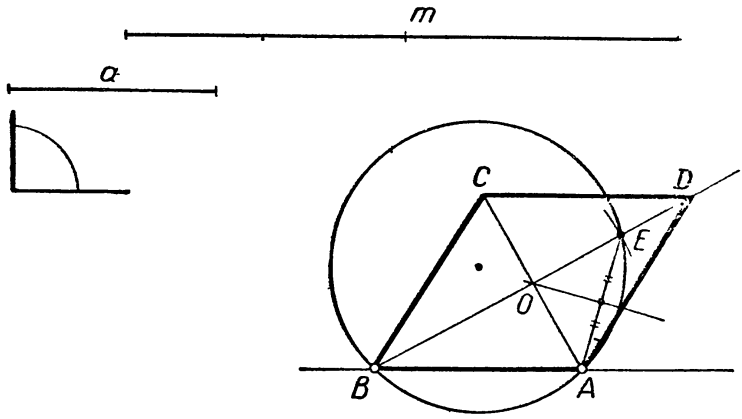


Рис 110

Построение (рис. 110). На $AB = a$ строим сегмент, вмещающий половину данного угла. Из точки B проводим дугу радиусом $\frac{1}{2} m$ до пересечения с дугой сегмента. Полученную точку пересечения соединяем с A и B. Через середину EA проводим перпендикуляр до пересечения с BE в точке O. O — точка пересечения диагоналей. Достраиваем $\triangle AOB$ до параллелограмма. Параллелограмм $ABCD$ — искомый.

Задача имеет два решения, если $H_{\text{сегм}} > \frac{m}{2} > a$. Если $\frac{m}{2} = H_{\text{сегм}}$ — одно решение. Если $H < \frac{m}{2} \leqslant a$ — нет решения.

590. Пусть параллелограмм построен (рис. 111), тогда в $\triangle KLN$: LN — данная диагональ, $\angle K$ — данный и $KO = \frac{1}{2} KM$ — медиана.

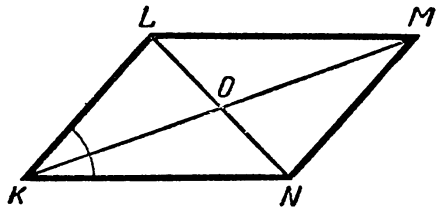


Рис. 111

Видим, что задача сводится к построению треугольника по основанию, углу при вершине и медиане, проведенной из вершины этого угла.

Построение (рис. 112). На отрезке AC, равном d_1, строим сегмент, вмещающий данный угол. Затем из

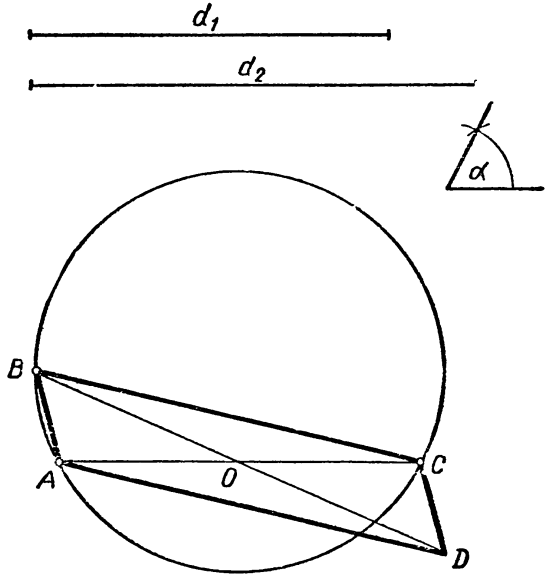


Рис. 112

точки O (середины AC) радиусом $\frac{1}{2} d_2$ проводим дугу до пересечения с дугой сегмента в точке B. Полученный треугольник ABC достраиваем до параллелограмма $ABCD$.

Задача имеет решение, если $\frac{d_1}{2} < \frac{d_2}{2} \leqslant H_{\text{сегм}}$. Если $\frac{d_2}{2} < \frac{d_1}{2}$ или $\frac{d_2}{2} > H_{\text{сегм}}$, то задача решения не имеет.

591. Анализ. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника AED по катету ED, равному данной высоте, и острому углу, противолежащему данному катету, равному $180° - \angle ABC$ (рис. 113). После построения $\triangle ADE$ на его катете AE от точки A откладываем отрезок, равный AB, а затем проводим $BC \parallel AD$ и $CD \parallel AB$.

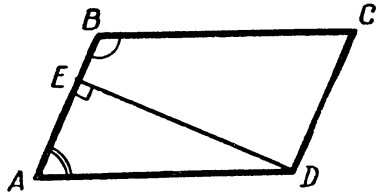


Рис. 113

592. На сторонах данного угла отложим произвольные, но равные отрезки $AB = AC$ (рис. 114). Точки B и C соединим. Продолжим BC за точку B и отложим $CK = a$. Из точки K проведем KM параллельно AC до пересечения с AB в точке M, затем из точки M проведем ME параллельно BC. ME — искомый отрезок.

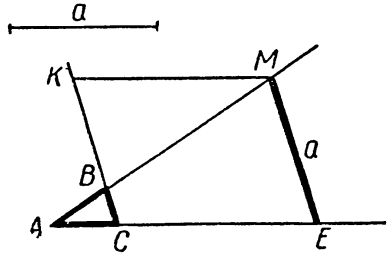


Рис. 114

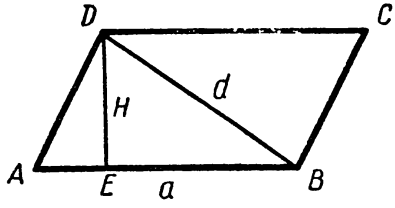


Рис. 115

593. Анализ. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе (данной диагонали) и катету (данной высоте).

Построение. Строим прямоугольный треугольник BED по катету DE, равному H_a, и гипотенузе BD, равной d (рис. 115). На полученном катете BE от точки B откладываем AB, равный a, точку A соединим с точкой D.

Достроим полученный треугольник ABD до параллелограмма $ABCD$. Задача возможна, если $H_a \leqslant d$, и имеет одно решение, если $H_a = d$ (рис. 116).

Задача имеет два решения, если $H_a < d$, так как от точки B отрезок, равный a, можно откладывать и вправо и влево, при этом получим различные параллелограммы.

Если $H_a > d$, то задача не имеет решения.

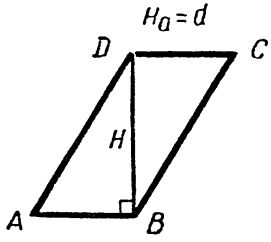


Рис. 116

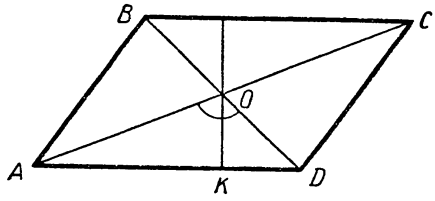


Рис. 117

594. Предположим, что задача решена и параллелограмм $ABCD$ искомый (рис. 117). В треугольнике AOD: AD — данное основание, $\angle AOD$ данный, $OK = \frac{1}{2}h$, следовательно, задача сводится к построению треугольника по основанию, углу при вершине и высоте, опущенной на основание.

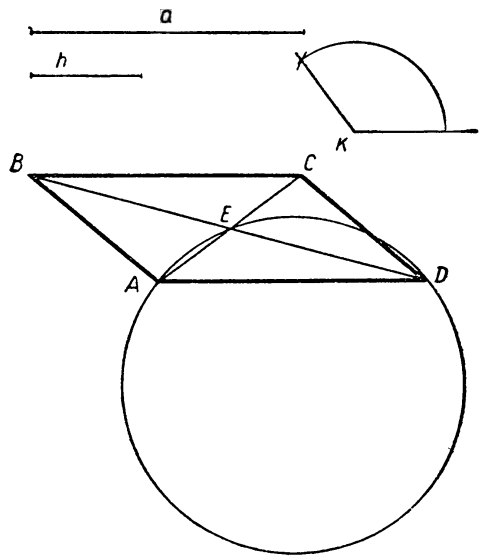


Рис. 118

Построение. На отрезке $AD = a$ строим сегмент, вмещающий данный угол K (рис. 118). На перпендикуляре к AD отложим отрезок, равный $0{,}5h$, и через полученную точку проведем прямую, параллельную AD до пересечения с дугой сегмента в точке E. Соединим точку E с точками A и D. Полученный треугольник AED достраиваем до параллелограмма; $ABCD$ — искомый параллелограмм.

Задача имеет решение, если $\frac{h}{2} \leqslant H_{\text{сегм}}$; если же $\frac{h}{2} > H_{\text{сегм}}$, то решения нет.

595. Анализ. Параллелограмм $ABCD$ искомый (рис. 119), в нем даны сторона AD, диагональ BD и угол AOD. Задача сводится к построению $\triangle AOD$ по

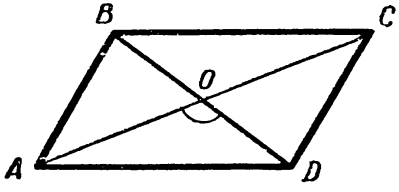


Рис. 119

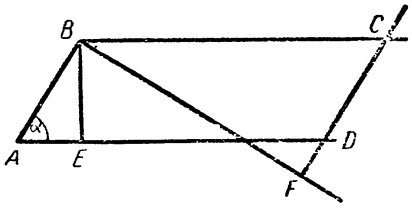


Рис. 120

двум сторонам AD и 0,5 BD и углу, противолежащему стороне AD. Построение такого треугольника рассмотрено в предыдущей задаче.

596. Строим прямоугольный треугольник ABE (рис. 120) по катету $BE = h_1$ и углу ABE, равному $90° - \alpha$. Проводим $BF \perp AB$, откладываем $BF = h_2$, $CF \parallel AB$, $BC \parallel AE$. $ABCD$ — искомый параллелограмм.

597. На произвольной прямой откладываем отрезок AD

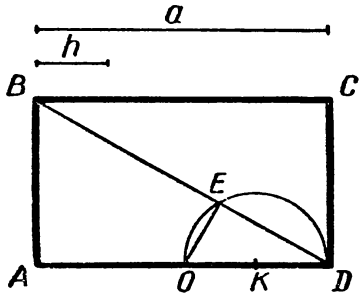


Рис. 121

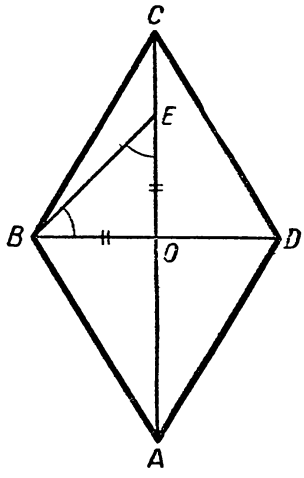


Рис. 122

(рис. 121), равный данной стороне прямоугольника, O — середина AD. На OD как на диаметре строим окружность. С центром в точке O и радиусом, равным данному перпендикуляру, проводим дугу до пересечения

с окружностью в точке E. Из точки A проведем перпендикуляр к AD. DE пересекается с этим перпендикуляром в точке B. $\triangle ABD$ достраиваем до прямоугольника $ABCD$.

598. Анализ. Пусть $ABCD$ — искомый ромб (рис. 122). Отложим $OE = BO$, т. е. $AE = 0{,}5(BD + AC)$.

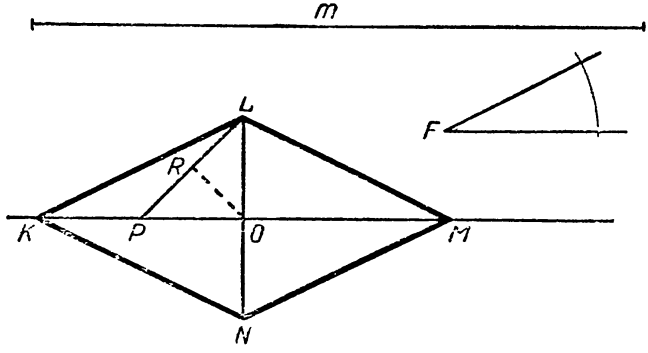


Рис 123

Так как $\triangle BOE$ равнобедренный и прямоугольный, то $\angle BEO = 45°$. Следовательно, задача сводится к построению треугольника по стороне (полусумме диагоналей) и двум прилежащим к ней углам (45° и данному).

Построение. Строим $\triangle PLM$: $MP = \frac{m}{2}$; $\angle P = 45°$; $\angle M = \angle F$ (рис. 123). Через середину PL проводим перпендикуляр к PL до пересечения с PM. Получим точку пересечения диагоналей ромба. Достраиваем $\triangle LOM$ до ромба.

599. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция (рис. 124), OF — ее средняя линия. Проведем $EF \parallel AB$. Задача сводится к построению $\triangle DEF$ по основанию ED, равному разности между большим основанием и средней линией, и двум углам, прилежащим к ней (углы равны соответственно $180° - \alpha$ и $180° - \beta$).

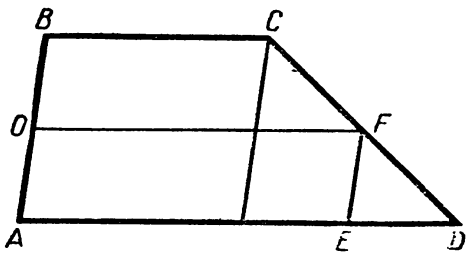


Рис. 124

Построение (рис. 125). Строим $\triangle EFD$ ($ED = a - b$, $\angle E = 180° - \beta$, $\angle D = 180° - \alpha$). От точки D откладываем

$AD = a$. Из точки A проведем $AB \parallel EF$. Отложим $CF = FD$ и из точки C проведем $BC \parallel AD$. $ABCD$ — искомая трапеция.

600. Проведем высоты трапеции (рис. 126). Задача сводится к построению прямоугольного $\triangle ABE$ по катету BE, равному данной высоте, и противолежащему острому углу. Затем разделим пополам полученную гипотенузу и проведем отрезок, параллельный катету AE и равный данной средней линии. При точке L строим угол KLC, равный данному углу. Из точки B проводим прямую, параллельную AE. $ABCD$ — искомая трапеция.

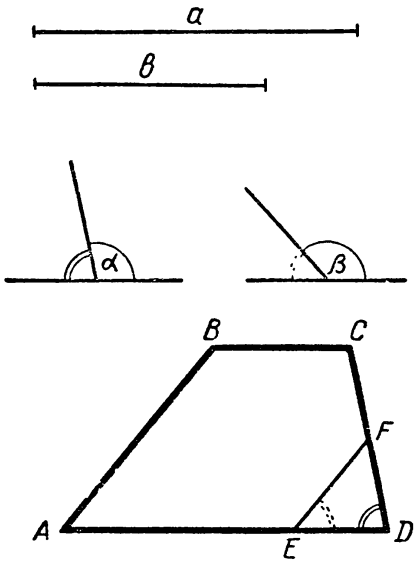


Рис. 125

601. Анализ. Проведем $CE \parallel AB$ (рис. 127). В треугольнике ECD известны CE, равная боковой стороне, ED, равная разности оснований, и угол ECD, равный данному углу. Таким образом, задача сводится к построению этого треугольника.

Построение. На отрезке PN, равном разности оснований, строим сегмент (рис. 128), вмещающий данный угол α. С центром в точке P радиусом, равным

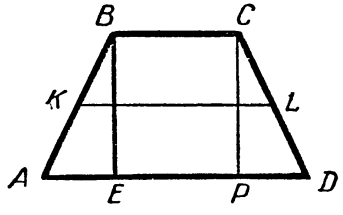


Рис. 126

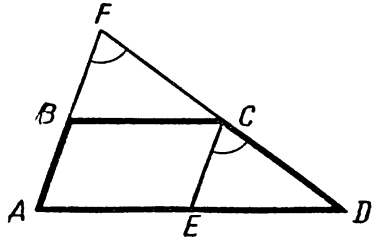


Рис. 127

боковой стороне c, проводим дугу до пересечения с дугой построенной окружности в точке M. Точку M соединяем с N. Откладываем $KP = b$ и проводим $KL \parallel MP$ и $ML \parallel PN$. Трапеция $KLMN$ искомая.

Задача имеет решение, если $\alpha < 180°$, причем решение может быть единственным, если PM пересечется с окружностью в одной точке ($\triangle MPN$ и полученная трапеция равнобедренные). Если же PM пересекает окружность в двух точках, то два решения; если нет

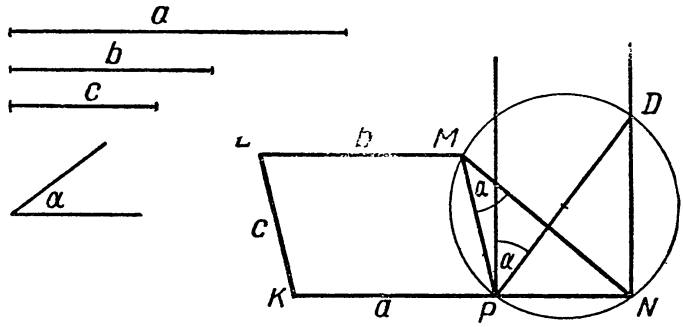


Рис. 128

точек пересечения, то решения не будет. Решения нет, если высота сегмента больше боковой стороны трапеции.

Задачу можно было решить и не используя построение сегмента, вмещающего данный угол (построение

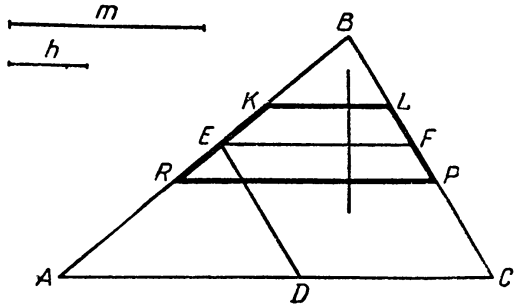


Рис. 129

треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них).

602. На основании треугольника (рис. 129) отложим $CD = m$. Проведем $DE \parallel BC$ и $EF \parallel AC$. Через любую точку отрезка EF проведем к нему перпендикуляр и на построенном перпендикуляре отложим по обе стороны от EF отрезки, равные $0{,}5h$. Через полученные точки проведем прямые, параллельные AC. $RKLP$ — искомая трапеция.

603. Анализ. На диагонали AC (рис. 130) отложим отрезок $AD = AB$, тогда треугольник ABD равнобедренный, $\angle A = 45°$, $\angle ABD = \angle BDA = 67°30'$, а смежный с ним $\angle BDC = 112°30'$.

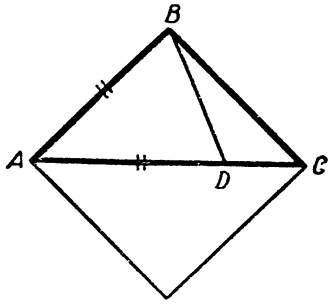


Рис. 130

Задача сводится к построению треугольника BDC по $CD = m$ и прилежащим углам 45° и 112°30′. Затем построим на BC квадрат.

604. Искомым геометрическим местом точек будет окружность, диаметр которой равен расстоянию между данной точкой и центром данной окружности, так как перпендикуляр, опущенный из центра данной окружности, делит каждую хорду пополам.

605. Геометрическим местом оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки A, на прямые, проходящие через точку B, является окружность, проходящая через A и B, диаметром ее служит отрезок AB.

606. I способ (рис. 131).

$\angle ABC + \angle BAD = 180°$ (сумма углов, прилежащих к одной стороне ромба).

$2\angle KBA + 2\angle KAB = 180°$ (сумма углов, смежных с углами ромба, прилежащих к одной стороне ромба).

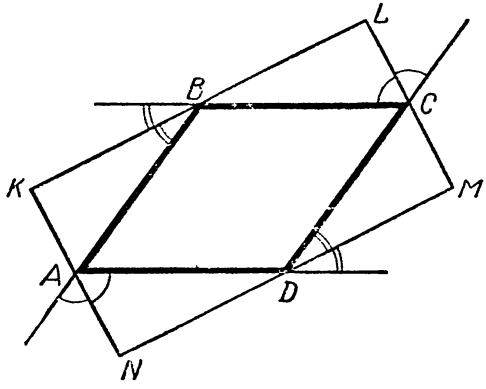


Рис. 131

$\angle KBA + \angle KAB = 90°$, значит, $\angle AKB = 90°$ (из $\triangle AKB$). Аналогично покажем, что $\angle L = \angle M = \angle N = 90°$, т. е. $KLMN$ — прямоугольник, в нем $AC = KL = MN$ и $BD = KN = ML$, значит, $P_{KLMN} = 2KL + 2KN = 2AC + 2BD = 2(AC + BD)$, т. е. P_{KLMN} больше $AC + BD$ в 2 раза.

II способ

$KL \parallel AC$ и $MN \parallel AC$, следовательно, $KL \parallel MN$. Аналогично $KN \parallel ML$.

$BD \perp AC$, значит, $BD \perp KL$, но тогда и $KN \perp KL$. Итак, в четырехугольнике $KLMN$ противоположные стороны параллельны и углы прямые, следовательно, это прямоугольник.

607. 1) Из построения (рис. 132) следует, что $AK = KO$, значит, и $\angle OAK = \angle AOK$.

2) $\angle OAK = \frac{1}{2}\angle BAC$; $\angle OAK = 30°$, $\angle AOK = 30°$.

3) $\angle OKL$ — внешний к $\triangle AOK$, $\angle OKL = \angle AOK + \angle OAK = 60°$.

4) Аналогично $\angle OLK = 60°$.

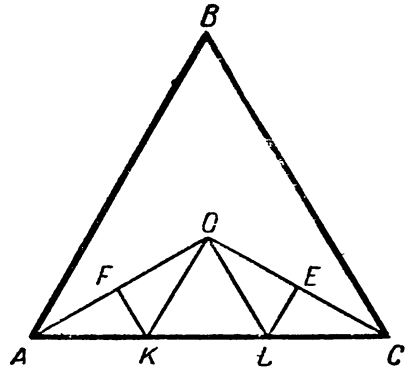


Рис. 132

5) Следовательно, $\triangle KOL$ — равносторонний: $OK = OL = KL$, а так как $AK = OK$ и $OL = LC$, то $AK = KL = LC$.

608. (Рис. 133.) 1) $\angle ACD$ — внешний к $\triangle ABC$, значит, $2\angle 1 = \angle A + 2\angle 2$; $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle A + \angle 2$;

2) $\angle ECD$ — внешний к $\triangle BEC$:

$$\angle 1 = \angle E + \angle 2;$$
$$\angle E = \angle 1 - \angle 2;$$

3) $\angle E = \frac{1}{2}\angle A + \angle 2 - \angle 2$; $\angle E = \frac{1}{2}\angle A$.

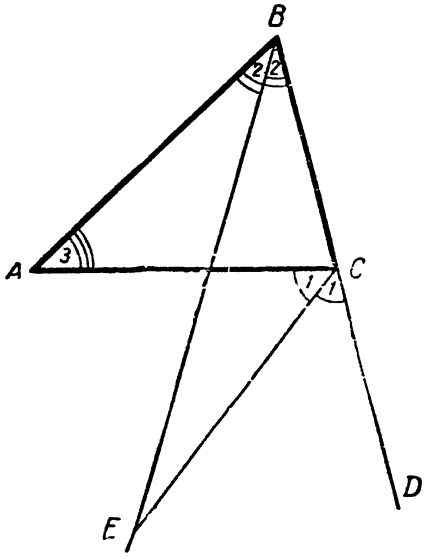


Рис. 133

609. (Рис. 134.) 1) $\angle DCB = \frac{180° - \angle B}{2}$; $\angle B = 180° - (\angle A + \angle ACB)$, отсюда

$$\angle DCB = \frac{\angle A + \angle ACB}{2}.$$

2) $\angle ACD = \angle CDB - \angle A$. Заменим $\angle CDB$ равным ему $\angle DCB$, получим $\angle ACD = \angle DCB - \angle A$. Прибавим к обеим частям последнего равенства по $\angle ACD$,

значит, $2\angle ACD = \angle ACD + \angle DCB - \angle A$, отсюда

$$\angle ACD = \frac{\angle ACD + \angle DCB - \angle A}{2},$$

так как

$$\angle ACD + \angle DCB = \angle ACB,$$

то

$$\angle ACD = \frac{\angle ACB - \angle A}{2}.$$

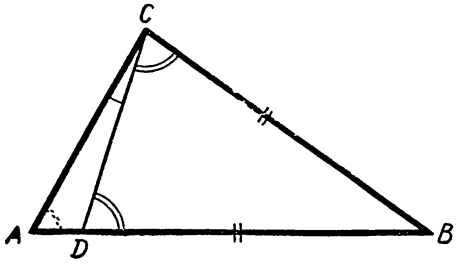


Рис. 134

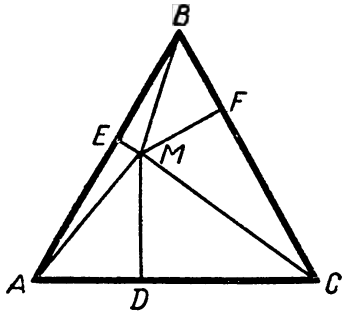


Рис. 135

610. (Рис. 135.)

$$S_{ABC} = S_{AMC} + S_{AMB} + S_{BMC} = \frac{AC \cdot MD}{2} + \frac{AB \cdot ME}{2} +$$

$$+ \frac{BC \cdot MF}{2} = \frac{AC}{2} \cdot (MD + ME + MF).$$

$$S_{ABC} = \frac{AC}{2} \cdot H.$$

Отсюда $MD + ME + MF = H$.

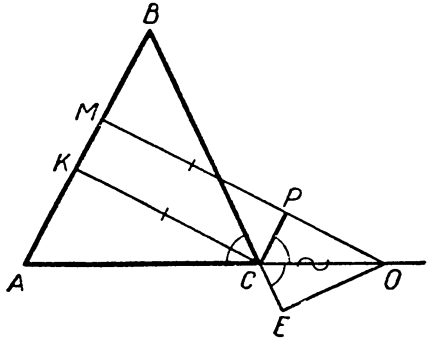


Рис. 136

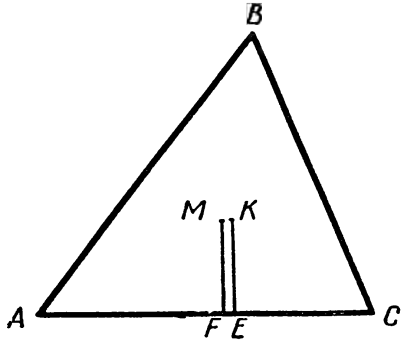


Рис. 137

611. Пусть на продолжении AC дана точка O (рис. 136). Ее расстояния от прямых AB и BC соответ-

ственно равны MO и OE. Из точки C опустим перпендикуляр CP на MO. $KMPC$ — прямоугольник, следовательно, $KC = MP$. Треугольник CPO равен треугольнику COE, следовательно, $EO = OP$. Значит, $MO - OE = KC$.

612. Пусть в треугольнике ABC (рис. 137) M — точка пересечения медиан, а K — точка пересечения биссектрис.

Площадь треугольника AMC равна $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABC.

Площадь треугольника AKC равна $\frac{1}{3}$ площади треугольника ABC т. к. $S_{ABC} = pr$, $AC = 0{,}5(AB + BC)$, значит, $AC = \frac{1}{3} P_{ABC}$. Отсюда $MF = KE$, значит, $MK \parallel AC$, где $MF \perp AC$ и $KE \perp AC$.

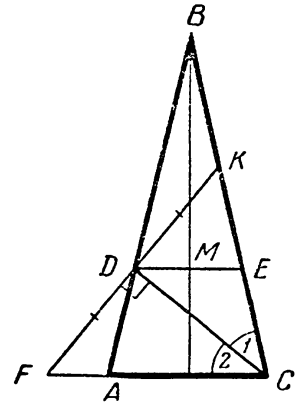


Рис. 138

613. 1) Продолжим FD до пересечения с BC в точке K (рис. 138). $\triangle CDF = \triangle CDK$ (CD — общий катет; $\angle 1 = \angle 2$), значит, $KD = DF$.

2) DE — средняя линия $\triangle FKC$, поэтому $DE = 0{,}5CF$.

3) $DM = 0{,}5DE = 0{,}25CF$.

614. 1) $\angle ABO = \angle OBC = \angle BOD$, значит, $BD = OD$ (рис. 139).

2) $\angle ACO = \angle OCB = \angle COE$, значит, $OE = CE$.

3) $P_{\triangle ODE} = OD + OE + ED = BD + CE + ED = BC$.

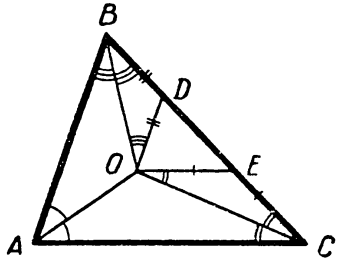


Рис. 139

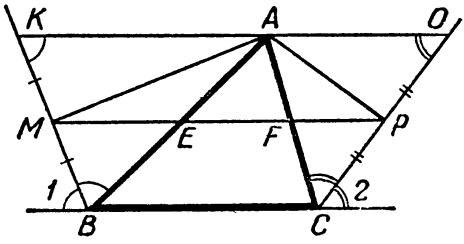


Рис. 140

615. Отложим на продолжении BM отрезок $MK = BM$ (рис. 140) и на продолжении CP отрезок $OP = CP$; соединим K с A и A с O. $\triangle ABM = \triangle AMK$ и $\triangle ACP = \triangle APO$ (по двум катетам), значит, $\angle K = \angle ABM = \angle 1$,

т. е. $AK \parallel BC$, аналогично $AO \parallel BC$. KAO — прямая, параллельная BC. $BCOK$ — трапеция, в которой $MB = KM$ и $CP = PO$, т. е. MP — средняя линия трапеции, значит, $MP \parallel BC$. Так как $BM = MK$ и $KO \parallel MP \parallel BC$, то $BE = AE$ и $AF = FC$, т. е. в прямоугольных треугольниках ABM и APC ME и PF — медианы, значит, $ME = 0{,}5AB$ и $PF = 0{,}5AC$, а EF — средняя линия треугольника ABC, поэтому $MP = \frac{1}{2} P_{ABC}$.

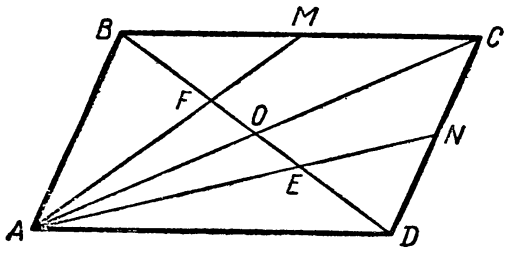


Рис. 141

616. В треугольнике ABC (рис. 141) AM — медиана, BO — другая медиана этого же треугольника ($AO = OC$), значит, $BF = \frac{2}{3} BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} BD = \frac{BD}{3}$.

Аналогично из $\triangle ACD$ покажем, что $DE = \frac{BD}{3}$, значит, и $EF = \frac{BD}{3}$, т. е. $BF = EF = ED$.

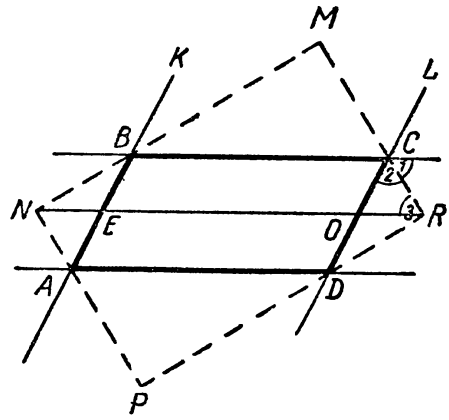


Рис. 142

617. а) $\angle KBC + \angle LCB = 180°$ (односторонние углы при $KB \parallel CL$ и секущей BC) (рис. 142). $\frac{1}{2}\angle KBC + \frac{1}{2}\angle LCB = 90°$, т. е. $\angle MCB + \angle MBC = 90°$, значит, в $\triangle BMC$ $\angle M = 90°$.

Аналогично можно показать, что $\angle N = \angle P = \angle R = 90°$, т. е. $NMRP$ — прямоугольник.

б) $\angle 1 = \angle 2$ (CR — биссектриса внешнего угла параллелограмма).

$\angle 1 = \angle 3$ (внутренние накрест лежащие углы).

Значит, $\angle 2 = \angle 3$, т. е. $OR = OC = OD = \frac{1}{2} CD$.

Аналогично покажем, что $NE = EB = AE = \frac{1}{2} AB$.

Отсюда $NR = NE + EO + OR = BE + BC + OC = BC + AB$.

618. а) $\angle DAB + \angle ABC = 180°$ (рис. 143), значит, $\angle 1 + \angle 2 = 90°$ (EB и AE — биссектрисы $\angle ABC$ и $\angle DAB$), следовательно, в $\triangle ABE$ $\angle BEA = 180° - (\angle 1 + \angle 2) = 90°$ и с ним вертикальный $\angle FEL = 90°$.

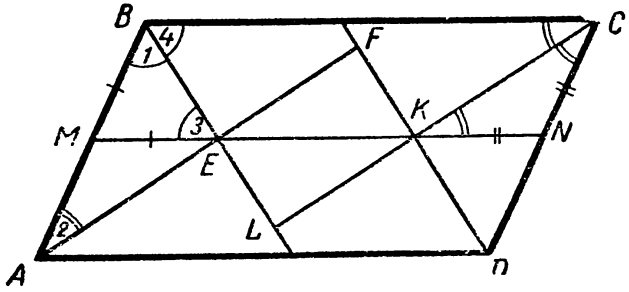


Рис. 143

Аналогично покажем, что все углы четырехугольника $LEFK$ равны по 90°, т. е. $LEFK$ — прямоугольник.

б) Теперь покажем, что диагональ $EK = BC - AB$. Рассмотрим $\triangle MBE$; в нем $\angle 1 = \angle 3$, так как $\angle 1 = \angle 4$ (BE — биссектриса), $\angle 4 = \angle 3$ (внутренние накрест лежащие), значит, $MB = ME$.

Таким же образом $KN = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AB$. $MN = BC = ME + EK + KN$, или $BC = EK + AB$, $EK = BC - AB$.

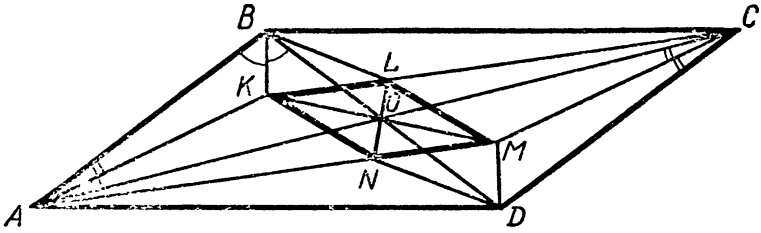


Рис. 144

619. $\triangle CMD = \triangle ABK$ (рис. 144), так как $AB = CD$ — противоположные стороны параллелограмма; $\angle BAK = \angle MCD$, как половины равных углов $\angle BAC$ и $\angle ACD$; $\angle ABK = \angle MDC$, как половины равных углов $\angle ABD$ и $\angle BDC$.

Из равенства этих треугольников следует, что $BK = MD$. Из равенства $\triangle BLC$ и $\triangle AND$ следует, $BL = ND$, а так как $\angle KBL = \angle MDN$ (половины противо-

положных углов параллелограмма), то $\triangle KBL = \triangle NMD$, т. е. $KL = MN$.

Таким же образом покажем, что $KN = ML$, т. е. докажем, что $KLMN$ — параллелограмм. Соединим O — точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ — с точками K и L.

Рассмотрим $\triangle ABO$, в нем AK и BK — биссектрисы углов, следовательно, и KO — биссектриса $\angle BOA$, аналогично LO — биссектриса $\angle BOC$.

$\angle KOL = 90°$ (биссектрисы двух смежных углов).

Так же докажем, что $\angle LOM = 90°$. Итак, два угла, $\angle KOL$ и $\angle LOM$, имеющие общую сторону LO и не покрывающие друг друга, — прямые, следовательно, KOM — диагональ параллелограмма $KLMN$. Аналогично докажем, что LON — диагональ. Так как диагонали в параллелограмме $KLMN$ взаимно перпендикулярны, следовательно, это ромб.

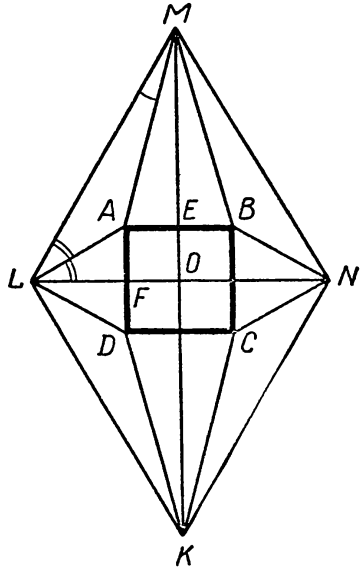


Рис. 145

620. Из того, что 1) диагонали ромба делят его углы пополам и 2) LA, MA, MB и NB — биссектрисы углов $\triangle LOM$ и $\triangle MON$ (рис. 145), следует:

а) ME делит пополам $\angle AMB$.

б) $\triangle LAM = \triangle MBN$, а, значит, $MA = BM$, то тогда $ME \perp AB$. А так как $MNKL$ — ромб, то $MO \perp LN$, следовательно, $AB \parallel LN$, аналогично $CD \parallel LN$ и $\angle BAD = 90°$.

Поэтому $ABCD$ — прямоугольник. Теперь докажем, что это квадрат. Точка A как точка пересечения биссектрис $\triangle LOM$ находится на одинаковом расстоянии от всех его сторон, отсюда $AE = AF$, но тогда $AB = AD$. В прямоугольнике $ABCD$ две соседние стороны равны. Значит, $ABCD$ — квадрат.

621. Из рисунка 146 1) $\triangle O_1BO_2 = \triangle O_3CO_2$ ($O_1B = CO_3$; $O_2B = O_2C$); $\angle O_1BO_2 = 90° + \angle MBN = \angle DCB + 90° = \angle O_2CO_3$.

Следовательно, $O_1O_2 = O_3O_2$ и $\angle O_1O_2B = \angle O_3O_2C$, $\angle O_1O_2O_3 = \angle O_1O_2B + 90° - \angle O_3O_2C = \angle BO_2C = 90°$.

Аналогично $O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1$ и, следовательно, $O_1O_2O_3O_4$ — квадрат.

622. На рисунке 147 $\triangle ADM = \triangle BDN$ ($AM = BN$, $AD = BD$, $\angle A = \angle DBN = 60°$). Значит, $MD = DN$ и $\angle ADM = \angle BDN$, $\angle ADB = 60°$, следовательно, $\angle MDN = 60°$, поэтому $\triangle MDN$ — равносторонний.

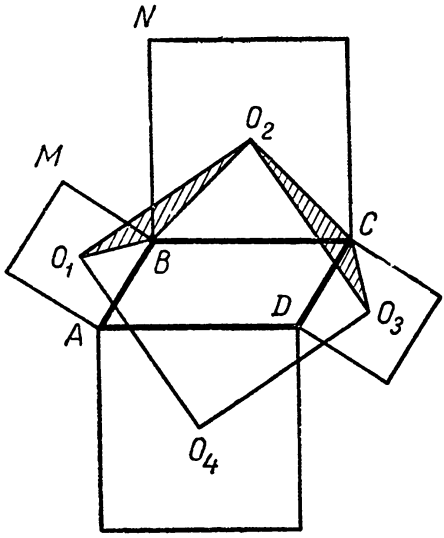


Рис. 146

623. $\triangle AKD = \triangle BMC$ ($AD = BC$ по условию, $\angle KAD = \angle BCM$ — противоположные углы ромба, $AK = CM = 0{,}5AB$), следовательно, $\angle ADK = \angle MBC$ (рис. 148)

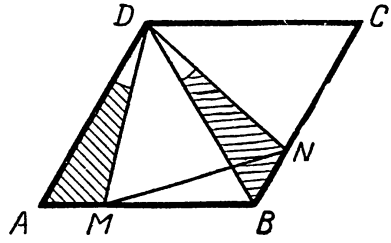


Рис. 147

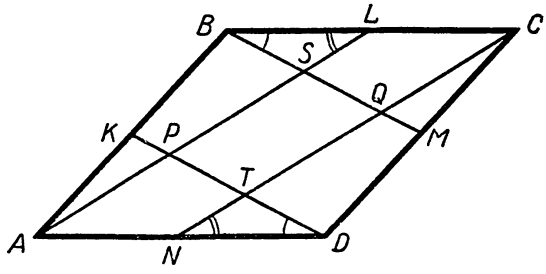


Рис. 148

Аналогично докажем, что $\triangle ABL = \triangle CND$, откуда следует, что $\angle TND = \angle SLB$.

Теперь из равенства $\triangle BLS$ и $\triangle NTD$ получим равенство противоположных углов S и T четырехугольника $PSQT$.

Аналогично $\angle TPS = \angle TQS$, следовательно, $PSQT$ — параллелограмм.

624. Проведем $CL \perp AB$ (рис. 149). $\triangle DFA = \triangle ALC$, так как $\angle 1 = \angle 2$, как углы с соответственно перпендикулярными сторонами; $AD = AC$ (стороны квадрата), следовательно, $DF = LA$.

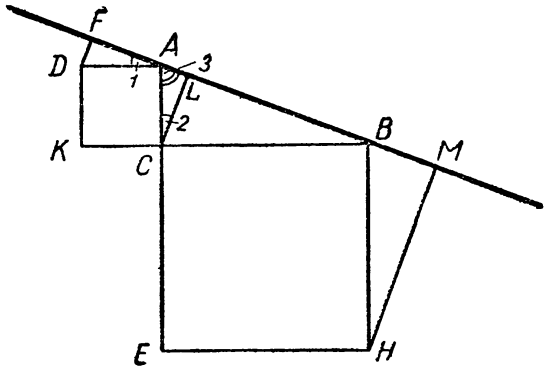


Рис. 149

Аналогично $\triangle HBM = \triangle CLB$, следовательно, $BL = HM$.

Значит, $DF + HM = AL + LB = AB$.

625. $\angle COB = 90°$ (по условию),

$\angle OBE = 90°$ ($AC \parallel BE$; $BO \perp AC$),

$\angle CEB = 90°$ ($CE \perp EB$), значит, $CEBO$ — прямоугольник (рис. 150).

Рассмотрим $\triangle DCB$ и $\triangle CBA$, они равны, так как CB — общая, $CD = AB$ (равнобедренная трапеция), $\angle DCB = \angle CBA$ (углы при основании равнобедренной трапеции), значит, $\angle DBC = \angle ACB = 45°$ ($\angle COB = 90°$), поэтому $CO = OB$, следовательно, $OCEB$ — квадрат.

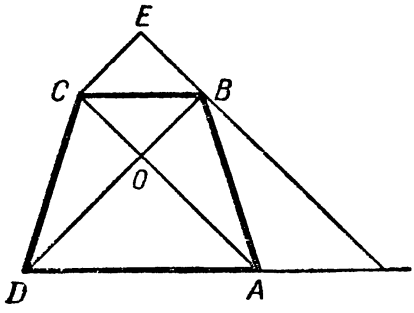


Рис 150

626. Пусть $ABCD$ (рис. 151) — данный четырехугольник и точки N, P, M, R — середины сторон его; E — середина AC и F — середина BD; K — пересечение MN и PR; $FP \parallel DC$; $FP = 0{,}5DC$ (из $\triangle DBC$); $ER \parallel DC$; $ER = 0{,}5DC$ (из $\triangle CAD$).

Следовательно, $REPF$ — параллелограмм с диагональю RP; K — лежит на RP, значит, EKF — прямая.

627. Рассмотрим $\triangle AEF$ и $\triangle CBD$ (рис. 152), в них $\angle D = \angle F$, как вписанные углы, опирающиеся на одну

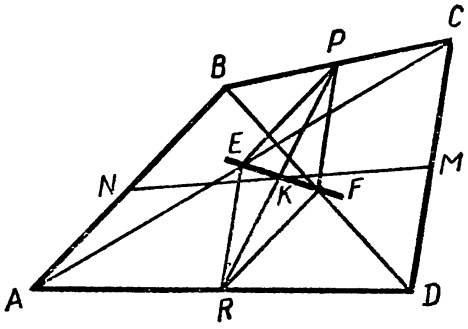


Рис. 151

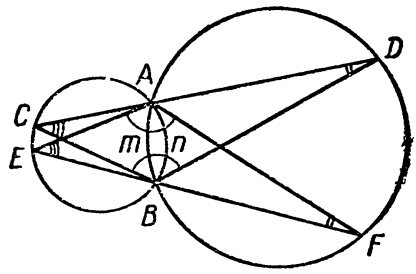


Рис. 152

и ту же дугу A_mB; $\angle C = \angle E$, как вписанные углы, опирающиеся на дугу A_nB.

А так как сумма внутренних углов любого треугольника равна 180°, то $\angle EAF = 180° - \angle E - \angle F$ и $\angle CBD = 180° - \angle C - \angle D$ и они равны между собой: $\angle EAF = \angle CBD$.

628. $\angle MBC$ (рис. 153) во всяком случае меньше 60°, так как опирается на дугу $MC < 120°$. Отложим $\angle ABD = \angle MBC$. $\triangle ABD = \triangle BMC$ так как $AB = BC$ — стороны равностороннего $\triangle ABC$ и углы, прилежащие к ним равны:

$\angle ABD = \angle MBC$ — по построению,

$\angle BAM = \angle BCM$ — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу BM. Тогда $BD = BM$ и $AD = MC$. А так как в $\triangle BMD$ $\angle BMD = 60°$ (опирается на дугу в 120°), то $DM = BM$.

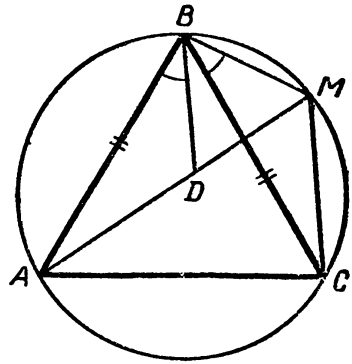


Рис. 153

Теперь $BM + MC = DM + AD$ и $BM + MC = AM$.

629. Так как квадрат и прямоугольник вписаны в одну и ту же окружность, то условие задачи, очевидно, равносильно такому: доказать, что из всех прямоугольных треугольников, вписанных в данную окруж-

ность, наибольшую сумму катетов имеет равнобедренный прямоугольный треугольник.

В такой редакции задача по содержанию сходна с задачей 630 и решения их могут быть очень близки. Однако мы дадим различные решения: в решении задачи 630 будет использовано г. м. т., из которых данный отрезок виден под данным углом, задача 629 будет решена без ссылки на это г. м. т.

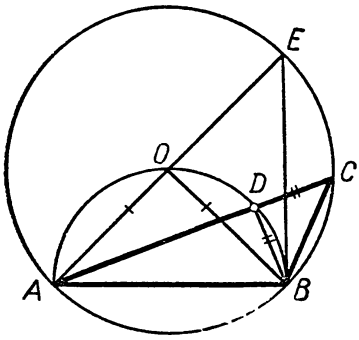


Рис. 154

В данную полуокружность впишем равнобедренный прямоугольный треугольник AOB (рис. 154). Затем, взяв на полуокружности произвольную точку D, соединим ее с точками A и B. Получим прямоугольный треугольник ADB. Докажем, что $AO+OB>AD+DB$. Продолжим AO на отрезок $OE=AO$; точка O одинаково удалена от точек A, B, E; значит, эти точки лежат на окружности с центром в точке O и радиусом AO. Продолжим AD до пересечения с этой окружностью в точке C, которую соединим с B. $\angle E=45°$, что следует из построения, тогда и $\angle C=45°$, как вписанный, опирающийся на ту же дугу, что и $\angle E$, значит, $\triangle BDC$ — прямоугольный равнобедренный, $BD=DC$; AE — диаметр, AC — хорда той же окружности, следовательно, $AE>AC$, или $AO+OB>AD+DB$.

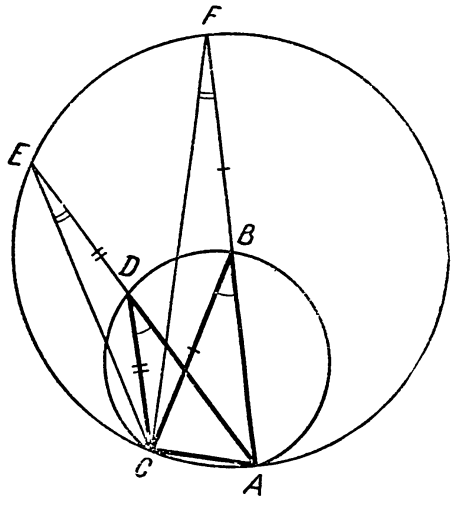


Рис. 155

630. Пусть равнобедренный $\triangle ABC$ и треугольник ADC (рис. 155) такие, что у них основание AC — общее и углы при вершинах равны ($\angle B=\angle D$). Значит, эти треугольники можно рассматривать вписанными в сег-

мент, вмещающий данный угол и построенный на отрезке AC. Докажем, что $P_{ABC} > P_{ADC}$.

Продолжим AB за точку B на отрезок $BF = AB = BC$ и AD на отрезок $DE = DC$. Соединим точки F и E с точкой C.

$\angle ABC$ — внешний к равнобедренному $\triangle FBC$, значит, $\angle F = \frac{1}{2}\angle ABC$, по той же причине $\angle E = \frac{1}{2}\angle ADC$, отсюда $\angle E = \angle F$.

Точки A, C, F одинаково удалены от B, поэтому лежат на окружности с диаметром ABF. Эта окружность пройдет и через точку E, так как отрезок AC виден из точек F и E под равными углами. ABF — диаметр, ADE — хорда, значит, $AB + BF > AD + DE$.

Используя то, что $BF = BC$ и $DE = DC$ и прибавляя к обеим частям неравенства по AC, получим: $AB + BC + AC > AD + AC + DC$, или $P_{ABC} > P_{ADC}$.

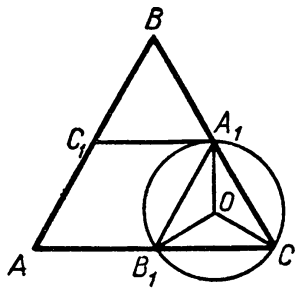


Рис. 156

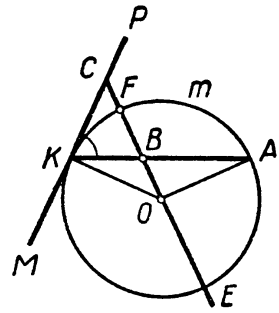


Рис. 157

631. $\triangle A_1B_1C$ — правильный (рис. 156), так как $\angle C = 60°$ ($\triangle ABC$ — равносторонний) и $A_1C = CB_1 = \frac{1}{2}AB$.

Пусть точка O — центр окружности, описанной около $\triangle A_1B_1C$, тогда $OA_1 = OB_1 = OC$, поэтому $\triangle A_1OB_1 = \triangle A_1OC = \triangle B_1OC$ (по трем сторонам), следовательно, $\angle B_1A_1O = 30°$, значит, OA_1 является в равностороннем треугольнике A_1B_1C биссектрисой, а поэтому и высотой, т. е. $A_1O \perp B_1C$.

В треугольнике ABC: C_1A_1 — средняя линия, значит, $C_1A_1 \parallel AC$, поэтому $A_1O \perp A_1C_1$, т. е. A_1C_1 — касательная к окружности.

632. $\angle CKA$ (рис. 157) измеряется $\frac{1}{2} \cup KmA$ (угол, составленный касательной и хордой).

$\angle CBK$ измеряется $\frac{\cup KF + \cup AE}{2}$ (угол с вершиной внутри круга).

$\cup KF + \cup AE = \cup KmA$, так как $\cup AE = \cup FmA = 90°$, значит, $\angle CKA = \angle CBK$, т. е. $KC = CB$.

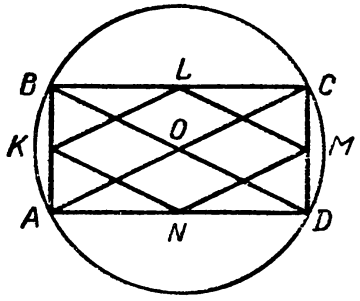


Рис. 158

633. Пусть $ABCD$ (рис. 158) — один из вписанных прямоугольников, его диагонали $AC = BD$ — диаметры круга. Середины сторон четырехугольника $ABCD$ соединены и получен четырехугольник $KLMN$. Докажем, что $KLMN$ — ромб.

В $\triangle ABC$: KL — средняя линия, значит, $KL = \frac{1}{2} AC$, т. е. половине диаметра круга. Аналогично докажем, что каждая из сторон четырехугольника $KLMN$ равна половине диаметра круга. Значит, $KLMN$ — ромб, его периметр $4KL = 4 \cdot \frac{1}{2} AC = 2AC$.

634. 1) Если P совпадает с C — концом дуги AC, тогда точка K тоже совпадает с точкой D и $PK = CD = CB$.

2) Если точка P совпадает с точкой A, тогда и точка K совпадает с точкой A и $PK = 0$, расстояние от A до AB тоже равно 0.

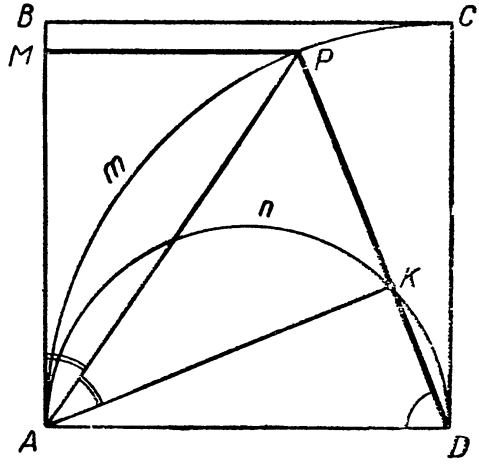


Рис. 159

3) Пусть теперь точка P находится между A и C (рис. 159). Расстояние от P до AB определяется длиной PM ($PM \perp AB$).

Соединим точку A с точками P и K. Докажем, что $\triangle AMP = \triangle APK$.

$\angle KDA$ измеряется $\frac{1}{2} \cup AnK$ ($\angle KDA$ — вписанный угол построенной полуокружности).

Этот же $\angle KDA$ измеряется $\smile AmP$ (центральный угол), следовательно, $\smile AnK$ содержит в 2 раза большее число градусов, чем $\smile AmP$.

$\angle MAP$ измеряется $\frac{1}{2} \smile AmP$ (угол, составленный касательной AM и хордой AP), а $\angle MAK$ измеряется $\frac{1}{2} \smile AnK$ (угол, составленный касательной AM и хордой AK) или $\smile AmP$, но тогда $\angle MAK$ равен удвоенному $\angle MAP$, отсюда в свою очередь следует, что $\angle PAK = \angle MAP$.

Прямоугольные треугольники AMP и APK равны по равным острым углам MAP и PAK и общей гипотенузе AP, значит, $MP = PK$.

635. $\triangle AOC = \triangle A_1O_1C_1$ (рис. 160), так как $AC = A_1C_1$ ($\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$), $\angle AOC = \angle A_1O_1C_1$, $\angle AOC = 2\angle B$, $\angle A_1O_1C_1 = 2\angle B_1$. Треугольники AOC и $A_1O_1C_1$ равнобедренные, значит, они равны, следовательно, $AO = A_1O_1$.

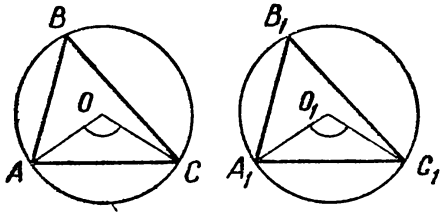


Рис. 160

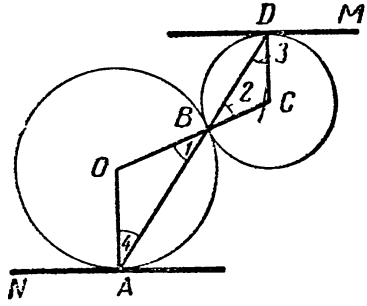


Рис. 161

636. Пусть B — точка касания (рис. 161), а AD — произвольная секущая, проходящая через точку B; AN и DM — касательные, проведенные через A и D. Соединив точки A, B и D с центрами окружностей, получим два равнобедренных треугольника AOB и BCD; в них $\angle 1 = \angle 2$, значит, $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $\angle MDB = \angle BAN$, следовательно, $AN \parallel DM$.

637. $\angle C_2AC_1 = \angle D_1AD_2$ (вертикальные углы), а так как это углы вписанные (рис. 162), то $\smile C_1mC_2$ содержит столько же градусов, сколько и $\smile D_1nD_2$, а значит, и дуги, дополняющие их до полной окружности, содержат одинаковое количество градусов; следовательно, $\angle K_1 =$

$= \angle K_2$ (полуразности дуг, заключенных между их сторонами, содержат одинаковое количество градусов).

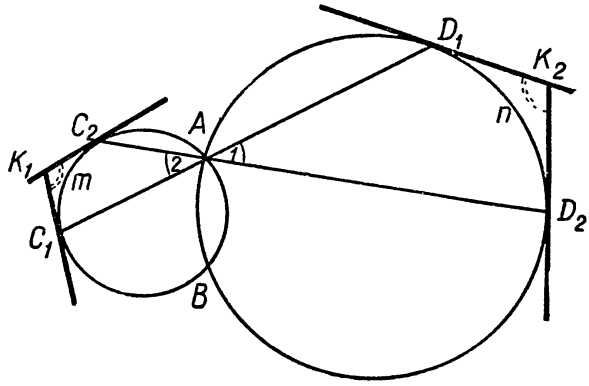


Рис. 162

638. Пусть две окружности внешне касаются в точке E (рис. 163). Эта точка, как известно, находится на линии центров. Проведем к этим окружностям внутреннюю касательную (значит, через точку E и к тому же перпендикулярно к OO_1) и внешнюю AB. Эти касательные пересекаются в точке C. По свойству касательных, проведенных к окружности из внешней точки, имеем $AC = CE = BC$; следовательно, точки A, B, E лежат на окружности с центром в точке C и диаметром AB. А так как ее радиус $CE \perp OO_1$, значит, эта окружность касается OO_1.

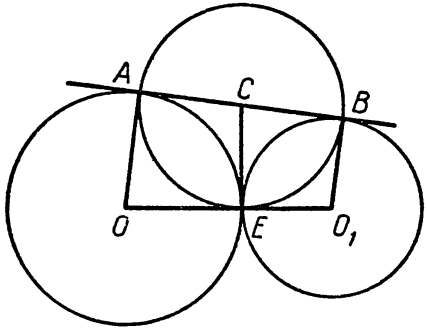


Рис. 163

639. Пусть расстояние между A и B S *км*, а средняя скорость по расписанию v *км/ч*, тогда все расстояние поезд должен был проехать за $\frac{S}{v}$ *ч*. Первый поезд проехал 6 *ч*, пройдя $6v$ *км*, затем 2 *ч* простоял, а оставшийся путь $(S - 6v)$ *км* проходил со скоростью $1{,}2\,v$ *км/ч*, значит, затратил на этот путь $\frac{S-6v}{1{,}2v}$ *ч*. Следовательно, на весь путь от A до B поезд затратил $\left(6 + 2 + \frac{S-6v}{1{,}2v}\right)$ *ч*, что на 1 *ч* больше $\frac{S}{v}$, т. е. имеем

первое уравнение $\frac{S}{v}+1=6+2+\frac{S-6v}{1{,}2v}$. Второй поезд прошел до остановки $(6v+150)$ *км* и шел этот путь со скоростью v *км/ч*, т. е. затратил $\frac{6v+150}{v}$ *ч*. Затем поезд стоял 2 *ч*, а оставшийся путь $(S-6v-150)$ *км* шел со скоростью $1{,}2\,v$ *км/ч*, т. е. на эту часть пути затратил $\frac{S-6v-150}{1{,}2v}$ *ч*.

Значит, на весь путь второй поезд затратил $\left(\frac{6v+150}{v}+\right.$ $\left.+2+\frac{S-6v-150}{1{,}2v}\right)$ *ч*, что больше $\frac{S}{v}$ на 1,5 *ч*, отсюда второе уравнение $\frac{S}{v}+1{,}5=\frac{6v+150}{v}+2+\frac{S-6v-150}{1{,}2v}$.

Таким образом, получена система двух уравнений с двумя неизвестными. Ее решение $v=50$; $S=600$, т. е. расстояние между A и B равно 600 *км*.

640. Скорость второго поезда 70 *км/ч*, первого 80 *км/ч*, а расстояние $AB=840$ *км*.

641. I получит 37,5 руб., II — 45 руб.

642. Пусть первый кран наполнит весь бассейн за x *ч*, а второй за y *ч*, тогда они вместе за час наполнят $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ часть бассейна, а за $3\frac{3}{5}$ *ч* $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 3\frac{3}{5}$ весь бассейн, т. е. $\frac{18}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$.

Первый кран был открыт $\frac{y}{3}$ *ч*, а в час он наполняет $\frac{1}{x}$ часть бассейна, значит, он всего наполнит $\frac{y}{3x}$ часть бассейна.

Второй кран был открыт $\frac{x}{3}$ *ч*, а в час он наполняет $\frac{1}{y}$ часть бассейна, значит, второй кран всего наполнит $\frac{x}{3y}$ часть бассейна, вместе по условию они наполнили таким образом $\frac{13}{18}$, значит,

$$\begin{cases} \frac{y}{3x}+\frac{x}{3y}=\frac{13}{18} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{18} \end{cases}$$

$$\frac{x}{y}=a;\quad \frac{1}{a}+a=\frac{13}{6};\quad 6a^2-13a+6=0;\quad a_1=\frac{3}{2};$$

$a_2 = \frac{2}{3}$; $\left(\frac{x}{y}\right)_1 = \frac{3}{2}$; $\left(\frac{x}{y}\right)_2 = \frac{2}{3}$; $x = \frac{3y}{2}$; $x = \frac{2y}{3}$.

Подставим полученные соотношения между x и y в уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{18}$ и получим:

$$\begin{cases} x_1 = 9; \\ y_1 = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 6; \\ y_2 = 9. \end{cases}$$

643. Пусть x *км/ч* — скорость третьего парохода, а y *ч* — его время на рейс от A до B, тогда расстояние от A до B xy *км*. Скорость первого парохода $(x+6)$ *км/ч*, а время его $(y-5)$ *ч*, $AB = (x+6) \cdot (y-5)$. Скорость второго парохода $(x+3)$ *км/ч*, его время $(y-3)$ *ч*, а путь $AB = (x+3) \cdot (y-3)$.

Отсюда система:

$$\begin{cases} (x+6) \cdot (y-5) = xy \\ (x+3) \cdot (y-3) = xy \end{cases}$$

Решив систему, получим $x = 12$, $y = 15$, т. е. скорость третьего парохода 12 *км/ч* и весь путь от A до B он проходит за 15 *ч*. Расстояние равно 180 *км* ($12 \cdot 15 = 180$).

644. $(t+0{,}5)$ *ч* шла вторая машина до того, как ее догнала третья, $(t+2)$ *ч* шла первая машина до того, как ее догнала третья. vt *км* — расстояние, которое прошла третья машина до того момента, когда она догнала вторую машину.

$40\,(t+0{,}5)$ *км* — то же самое расстояние, но проделанное второй машиной. Значит, $vt = 40\,(t+0{,}5)$.

$50\,(t+2)$ *км* — расстояние, пройденное первой машиной.

$v\,(t+1{,}5)$ *км* — расстояние, пройденное третьей машиной до того момента, когда она догнала первую машину.

Отсюда $v\,(t+1{,}5) = 50\,(t+2)$.

Получим систему:

$$\begin{cases} vt = 40\,(t+0{,}5) \\ v\,(t+1{,}5) = 50\,(t+2) \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $t = 1$, значит, $v = 60$ *км/ч*.

645. I способ

Пусть S *км* — расстояние, x *ч* — время, за которое проходит это расстояние второй пешеход,

$(x+2{,}5)$ *ч* — время, за которое проходит это расстояние первый.

Получим уравнение:

$$\left(\frac{S}{x+2,5}+\frac{S}{x}\right)\cdot 3=S, \text{ отсюда } \left(\frac{1}{x+2,5}+\frac{1}{x}\right)\cdot 3=1.$$

Решив это уравнение, получим $x=5$, т. е. первый пешеход проходит расстояние за 7,5 *ч*, второй — за 5 *ч*.

646. x *км* прошел второй пешеход от A, а $(x+4)$ *км* прошел первый пешеход от B до встречи во второй раз. Тогда скорость первого пешехода x *км/ч*, а второго — $\frac{x+4}{2,5}$ *км/ч*.

Первый пешеход прошел расстояние $(2x+4+x+4)$ *км*, второй $(2x+4+x)$ *км*. Каждый из них затратил соответственно времени:

$$\frac{2x+4+x+4}{x}=\frac{(2x+4+x)\cdot 2,5}{x+4}.$$

Отсюда $x=4$, т. е. скорость первого пешехода 4 *км/ч*.

647. x *км/ч* — скорость первого пешехода, y *км/ч* — скорость второго пешехода, тогда $6\frac{2}{3}x+6\frac{2}{3}y=60$.

Отсюда $x+y=9$.

Второй пешеход задержался в B перед началом пути на $\left(\frac{40}{x}-\frac{20}{y}\right)$ *ч*. Время между прибытием первого в B и второго в A равно $\left(\frac{40}{y}-\frac{20}{x}\right)$ *ч*, что меньше $\left(\frac{40}{x}-\frac{20}{y}\right)$ *ч* в два раза.

Отсюда $\left(\frac{40}{y}-\frac{20}{x}\right)2=\frac{40}{x}-\frac{20}{y}$, значит, $5x=4y$.

Решив систему $\begin{cases}5x=4y\\ x+y=9,\end{cases}$ получим $x=4$.

648. $CD=x$, $AC+BD=9-x$ (рис. 164).

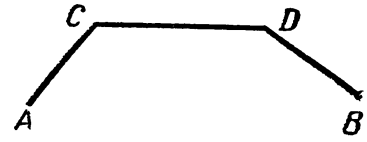


Рис. 164

$$\frac{2x}{5}+\frac{9-x}{4}+\frac{9-x}{6}=3\frac{41}{60}.$$

Отсюда $x=4$.

649. x *км/ч* — собственная скорость катера.

$$\frac{13\frac{1}{3}}{x+4}+\frac{9\frac{1}{3}}{x-4}=\frac{13\frac{1}{3}-9\frac{1}{3}}{4}, \text{ отсюда } x=22\frac{2}{3}.$$

650. Пусть x *км/ч* — первоначальная скорость велосипедиста, тогда

$$\frac{60}{x}=1+\frac{1}{3}+\frac{60-x}{x+4};\ \text{отсюда}\ x=20.$$

651. $0{,}4x+0{,}05(140-x)=0{,}3\cdot 140$.

Ответ: 100 *кг* и 40 *кг*.

652. Пусть V_1 *м/сек* и V_2 *м/сек* — скорости точек, тогда $\frac{60}{V_1}$ *сек* и $\frac{60}{V_2}$ *сек* — время, за которое каждая из них сделает полный оборот, отсюда $\frac{60}{V_1}-\frac{60}{V_2}=5$. $60V_1$ *м* — расстояние, которое проходит первая точка за 1 *мин*, т. е. за 60 *сек*; $60V_2$ *м* — расстояние, которое проходит вторая точка за 1 *мин*, т. е. за 60 *сек*, отсюда $60V_1$ *м* больше $60V_2$ *м* на полный оборот, т. е. на 60 *м*, значит, $60V_1-60V_2=60$. Получили систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}\frac{60}{V_1}-\frac{60}{V_2}=5;\\ 60V_1-60V_2=60.\end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $V_1=4$ *м/сек*, $V_2=3$ *м/сек*.

653. $V_1=0{,}9$ *м/сек*, $V_2=0{,}6$ *м/сек*.

654. Пусть первый велосипедист проходит всю окружность трека за x *мин*, а второй — за y *мин*. Получили систему двух уравнений:

$$\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=1;\\ \frac{3}{x}-\frac{3}{y}=1.\end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $x=2{,}4$; $y=12$.

655. Пусть один из велосипедистов может пройти всю окружность трека за x *мин*, а другой — за y *мин*. Получили систему:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1;\\ 2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2y}\right)=1.\end{cases}$$

Решая систему, получим: $x = 1{,}5$; $y = 3$.

656. 4 *сек* и 6 *сек*.

657. V_1 и V_2 — скорости, а S — все расстояние. Получаем систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 6V_1 + 6V_2 = S; \\ \dfrac{2S}{5V_1} - 2 = \dfrac{2S}{15V_2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} V_2 = \dfrac{S - 6V_1}{6}; \\ \dfrac{S}{5V_1} - 1 = \dfrac{S}{15V_2}; \end{cases}$$

$$\frac{S}{5V_1} - 1 = \frac{2S}{5(S - 6V_1)}; \quad \frac{S^2}{V_1^2} - 13\frac{S}{V_1} + 30 = 0, \text{ откуда}$$

$$\frac{S}{V_1} = 10; \quad \frac{S}{V_1} = 3.$$

Подставим полученное значение времени (10 *ч* и 3 *ч*) во второе из составленных уравнений, получим: $\frac{S}{V_2} = 15$ *ч*. При $\frac{S}{V_1} = 3$ *ч* $\frac{S}{V_2}$ выражено числом отрицательным. Значит, первый поезд проходит все расстояние за 10 *ч*, а второй за 15 *ч*.

658. Велосипедист ехал со скоростью x *км/ч*, значит, 96 *км* он проехал за $\frac{96}{x}$ *ч*. Собирался он проезжать 96 *км* за $\left(\frac{96}{x} + 2\right)$ *ч*, т. е. он должен был ехать со скоростью $\frac{96}{\frac{96}{x} + 2}$ *км/ч*. Отсюда уравнение:

$$x - 1 = \frac{96}{\frac{96}{x} + 2} \cdot \frac{5}{4}.$$

Решая это уравнение, получим: $x = 16$.

659. Пусть скорость первого мальчика V_1 *м/сек*, а скорость второго — V_2 *м/сек*, тогда 10 *м* первый мальчик пробежал за $\frac{10}{V_1}$ *сек*, а второй за $\frac{10}{V_2}$ *сек*. А так как первый стартовал на 1 *сек* раньше, то $\frac{10}{V_1} - \frac{10}{V_2} = 1$. Вторая встреча произошла через 10 *сек* после выхода первого или через 9 *сек* после выхода второго, а вместе за это время они прошли двойную длину беговой дорожки, т. е. 100 *м*, значит, $10V_1 + 9V_2 = 100$.

Получили систему:

$$\begin{cases} 10V_1 + 9V_2 = 100; \\ \frac{10}{V_1} - \frac{10}{V_2} = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $V_1 = 4$, т. е. первый мальчик до второй встречи с другим мальчиком пробежал $4 \cdot 10 = 40$ ($м$), следовательно, ему осталось до финиша $50 - 40 = 10$ ($м$).

660. Пусть $V_м$ — собственная скорость лодки; $V_р$ — скорость течения реки; S — весь путь; тогда скорость по течению $V_м + V_р$, а против течения $V_м - V_р$. На путь от A до B лодка тратит $\frac{S}{V_м - V_р}$ $ч$, а на путь от B до A $\frac{S}{V_м + V_р}$ $ч$, отсюда

$$\frac{S}{V_м - V_р} = \frac{S}{V_м + V_р} \cdot 1{,}5.$$

Из этого уравнения найдем, что $V_м = 5V_р$.

Когда чинили мотор, лодка шла со скоростью реки 20 *мин*, значит, она прошла $\frac{1}{3} V_р$ $км$, т. е. лодке понадобилось опять (после починки) пройти это расстояние со скоростью $V_м - V_р$, на что ушло $\frac{\frac{1}{3} V_р}{V_м - V_р} = \frac{\frac{1}{3} V_р}{5V_р - V_р} = \frac{1}{12}$ ($ч$). Значит, всего из-за починки лодка потеряла $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ ($ч$), т. е. 25 *мин*.

661. Если x $км/ч$ — скорость первой машины, то $(x - 10)$ $км/ч$ — скорость второй машины, отсюда $x > 10$. Первая машина затратила на путь от A до B, включая и остановку, $\left(\frac{100}{x} + \frac{5}{6}\right)$ $ч$, а вторая машина $\frac{100}{x - 10}$ $ч$. По условию задачи $\frac{100}{x} + \frac{5}{6} \leqslant \frac{100}{x - 10}$.

Знаменатели положительные, значит, $x^2 - 10x - 1200 \leqslant 0$, т. е. $-30 \leqslant x \leqslant 40$, а так как $x > 10$, то $10 < x \leqslant 40$.

662. x машин нагружает первый за час, тогда после перерыва он нагрузил $2x$ машин. Второй после перерыва нагрузил $(x + 2)$ машин, а за час он нагружал $\frac{x+2}{2}$ машин, значит, до перерыва он работал $8 : \frac{x+2}{2} =$

$= \frac{16}{x+2}$ (*ч*). Первый до перерыва работал столько же часов, а в час он грузил x машин, значит, всего до перерыва первый погрузил $\frac{16x}{x+2}$ машин. Оба до перерыва нагрузили $\left(\frac{16x}{x+2}+8\right)$ машин, что на 12 машин меньше, чем $2x$ машин, т. е. того, что нагрузил первый после перерыва. Отсюда уравнение: $\frac{16x}{x+2}+8=2x+12$, $x=2$. Оба до перерыва нагрузили $\frac{16\cdot 2}{2+2}+8=16$ (машин); после перерыва первый нагрузил $2\cdot 2=4$ (машины), второй после перерыва $2+2=4$ (машины), значит, всего нагрузили 24 машины.

663. I способ

Пусть каждый должен был изготовить x деталей, а за час V деталей, значит, все детали должны быть готовы через $\frac{x}{V}$ дней. Второй выполнил $0{,}9x$ деталей за $\frac{x}{V}$ дней, значит, в день он изготовлял $0{,}9x : \frac{x}{V} = 0{,}9V$.

Второй недодал $0{,}1x$ деталей, что составляет $\frac{2}{3}V$, отсюда $0{,}1x=\frac{2}{3}V$; $x=\frac{20V}{3}$.

Если бы второй делал в час $(0{,}9V+3)$ детали, то за $\frac{x}{V}$ дней он бы изготовил $\frac{(0{,}9V+3)\,x}{V}$ деталей, что составило бы 95% задания, т. е. $0{,}95x$. $\frac{(0{,}9V+3)\cdot x}{V}=0{,}95x$; отсюда $V=60$, а из первого уравнения $x=400$.

II способ

Время работы, т. е. заданный срок: $x:\left(0{,}1x:\frac{2}{3}\right)=6\frac{2}{3}$ (*ч*). Второй в час делал $0{,}9x : 6\frac{2}{3}=\frac{27}{200}x$, уравнение: $\left(\frac{27}{200}x+3\right)\cdot 6\frac{2}{3}=0{,}95x$; отсюда $x=400$.

664. Скорость работы первой бригады в 4 раза больше, чем скорость у третьей бригады.

665. 6 дней, 12 дней, 18 дней.

666. $(\alpha^2+\beta)(\beta^2+\alpha)=\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2;$

$$\alpha^2\beta^2+\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2;$$

$$\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2;$$

$$\alpha+\beta=-p;\ \alpha\cdot\beta=q;$$

$$(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta;$$

$$-p^3-3q(-p)+q=p^2-2q;$$

$$p^3+p^2-3pq-3q=0.$$

667. $(x_1^2-x_2)(x_1-x_2^2)+x_1^2x_2^2=x_1^2+x_2^2;$

$$x_1^3-x_1^2x_2^2-x_1x_2+x_2^3+x_1^2x_2^2=x_1^2+x_2^2;$$

$$x_1^3+x_2^3=x_1^2+x_1x_2+x_2^2;$$

$$(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=(x_1+x_2)^2-x_1x_2;$$

$$-p^3-3q(-p)=p^2-q;$$

$$p^3+p^2-3pq-q=0.$$

668. По теореме Виета $x_1+x_2=-1;\ x_1x_2=\frac{2a^2}{2a+1};$

$$x_1^3+x_2^3=3;$$

$$(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=3;$$

$$(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]=3;$$

$$-1\cdot\left(1-\frac{6a^2}{2a+1}\right)=3;$$

$$a=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}.$$

669. $x_1+x_2=-1;\ x_1\cdot x_2=\frac{b^2}{3b-1};$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=-1-\frac{3b^2}{3b-1}(-1).$$

По условию сумма кубов корней данного уравнения равна -1, поэтому:

$$-1-\frac{3b^2}{3b-1}(-1)=-1;\ \text{отсюда}\ b=0.$$

670. Если x — один корень, то второй корень $2x$, по теореме Виета.

$$x+2x=\frac{1-3a}{a^2-5a+3};\quad 3x=\frac{1-3a}{a^2-5a+3};$$

$x \cdot 2x = \frac{2}{a^2-5a+3}$; $2x^2 = \frac{2}{a^2-5a+3}$, отсюда

$$x = \frac{1-3a}{3(a^2-5a+3)};$$

$$\frac{(1-3a)^2}{9(a^2-5a+3)^2} = \frac{1}{a^2-5a+3}; \quad a = \frac{2}{3}.$$

671. Пусть корни x и x^2, тогда $x \cdot x^2 = m^2$;

$$x^3 = m^2; \; m = \pm\sqrt{x^3}; \; x + x^2 = \frac{15}{4}.$$

$$x_1 = -\frac{5}{2}; \quad x_2 = \frac{3}{2}.$$

(x_1 не подходит в области действительных чисел.)

$$m = \pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3}; \; m = \pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

672. I способ

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2-2ac}{a^2}.$$

II способ

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, тогда

$$\begin{array}{rl} & ax_1^2+bx_1+c=0 \\ + & ax_2^2+bx_2+c=0 \\ \hline & a(x_1^2+x_2^2)+b(x_1+x_2)+2c=0, \end{array}$$

$$a(x_1^2+x_2^2) = -b(x_1+x_2)-2c,$$

$$x_1^2+x_2^2 = -\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right) - \frac{2c}{a},$$

$$x_1^2+x_2^2 = \frac{b^2-2ac}{a^2}.$$

673. $x_1^3+x_2^3 = \frac{-b^3+3abc}{a^3}$.

674. $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2+x_1^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{b^2-2ac}{c^2}$.

675. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -k \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

$$x_1 = \frac{1-k}{2}; \quad x_2 = -\frac{1+k}{2};$$

$$-\frac{1-k}{2} \cdot \frac{1+k}{2} = 7; \quad k = \pm\sqrt{29}.$$

676. $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = x_1 x_2 [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = -\frac{196}{27}$.

677. $\sqrt{(a+3)^2} + \sqrt{(a-3)^2} = |a+3| + |a-3|$.

1) $a < -3$; $-a-3-a+3 = -2a$;

2) $-3 \leqslant a < 3$; $a+3-a+3 = 6$;

3) $a \geqslant 3$; $a+3+a-3 = 2a$.

678. $\dfrac{a^2+1}{a\sqrt{\dfrac{a^4-2a^2+1+4a^2}{4a^2}}} = \dfrac{a^2+1}{\dfrac{a\sqrt{(a^2+1)^2}}{2|a|}} = \dfrac{2(a^2+1)|a|}{a(a^2+1)} = \dfrac{2|a|}{a}$.

1) 2 при $a > 0$;

2) -2 при $a < 0$.

679. $\dfrac{a-b}{\sqrt{a(a^2-2ab+b^2)}} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a(a-b)^2}} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a} \cdot |a-b|}$.

1) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, если $a > b$;

2) $-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, если $a < b$.

680. $\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| = \sqrt{x-1}+1 - \sqrt{x-1}+1 = 2$.

681. $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} : \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = x + \sqrt{x^2-1}$.

$$\frac{a^2+b^2}{2ab}+\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2}-1}=\frac{a^2+b^2+\sqrt{(a^2-b^2)^2}}{2ab}=$$

$$=\frac{a^2+b^2+|a^2-b^2|}{2ab}.$$

1) $a^2>b^2$; $\quad\dfrac{a^2+b^2+a^2-b^2}{2ab}=\dfrac{a}{b}$;

2) $a^2<b^2$; $\quad\dfrac{a^2+b^2-a^2+b^2}{2ab}=\dfrac{b}{a}$.

682. $$\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2+1+x^2+2x\sqrt{1+x^2})}=$$

$$=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\,(2+2x^2+2x\sqrt{1+x^2})}=$$

$$=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2+x\sqrt{1+x^2})}=$$

$$=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+x^2}\,(\sqrt{1+x^2}+x)}=\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

683. Нетрудно убедиться, что все подкоренные выражения положительны, тогда

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{4-\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{4-(2+\sqrt{3})}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=1.$$

684. $y=\dfrac{2}{2-x}$; использовать решение № 680.

685. $x-2\geqslant 0$, $x-3\geqslant 0$.

Следовательно, сумма двух неотрицательных чисел и числа 7 должна дать нуль, что невозможно, значит, уравнение не имеет решения.

686. $\sqrt{x^2+1}\geqslant 1$;

$\sqrt{x^2+2}\geqslant\sqrt{2}>1$;

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}>2$. Нет решения.

687. $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(2+x)^2}$,

I случай: $-1<x<2$. | II случай: $x>2$.

$2-x+x+1=x+2$; $x=1$. | $x-2+x+1=x+2$; $x=3$.

688. Нет решения.

689. $x^2+4x+4-16\sqrt{2x}+16=0$;

$x^2-4x+4+8x-16\sqrt{2x}+16=0$;

$(x-2)^2+8(x-2\sqrt{2x}+2)=0$;

$(x-2)^2+8(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2=0$.

Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю, значит, каждое слагаемое равно нулю, отсюда $x=2$.

690. $\sqrt{(x-3)(x-1)}+\sqrt{-(x-2)(x-1)}=\sqrt{x(x-1)}$; $x=1$; при этом все подкоренные выражения равны нулю. Других корней в этом уравнении не может быть, так как нет значения x, при котором все подкоренные выражения будут одновременно положительными.

691. Нет решений.

692. Составим систему неравенств:

$$\begin{cases} x+2\geqslant 0; \\ x-5\geqslant 0; \\ 5-x\geqslant 0. \end{cases}$$

Общее решение $x=5$.

693. $\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}=$

$=\sqrt{2+3+5+2\sqrt{2\cdot 3}+2\sqrt{2\cdot 5}+2\sqrt{3\cdot 5}}=$

$=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

694. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})}=$

$=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.

695. а) $\sqrt{5}-1$; б) $2+\sqrt{3}$; в) $3-\sqrt{2}$; г) $5-\sqrt{3}$; д) $|\sqrt{n-1}-1|$; е) $|\sqrt{a-x-1}-1|$.

696.

а) $x^2+\sqrt{3}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}$; $x^2+\sqrt{3}=1+\sqrt{3}$; $x=\pm 1$.

б) $x^2+\sqrt{2}-2=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$; $x^2+\sqrt{2}-2=\sqrt{2}-1$; $x=\pm 1$.

697. $\dfrac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{1}=1.$

698. 0. **699.** $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. **700.** $\sqrt{2}$.

701. $\dfrac{2(2+\sqrt{3})}{2(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}=$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)}{2}.$$

702. $x^2-2x+1+y^2-4y+4=0$; $(x-1)^2+(y-2)^2=0$; $x=1$; $y=2$.

703. $(2x-1)^2+(3y-1)^2+(4z-1)^2=0$; отсюда, так как сумма квадратов трех чисел может равняться нулю в том и только в том случае, когда каждое из них равно нулю, т. е. $x=0{,}5$; $y=\frac{1}{3}$; $z=0{,}25$.

704. I способ

Разделим каждый член данного уравнения на x^2 (x в данном уравнении не равен нулю), получим:

$$x^2-5x+10-\frac{10}{x}+\frac{4}{x^2}=0;\quad \left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{2}{x}\right)+10=0;$$

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{2}{x}\right)+6=0;$$

а) $x+\frac{2}{x}=3$ $x_1=1$; $x_2=2$;

б) $x+\frac{2}{x}=2$; это уравнение не имеет действительных корней.

II способ

Умножим обе части на x, получим:

$$x^5-5x^4+10x^3-10x^2+4x=0.$$

$$(x-1)^5-(x-1)=0;\quad (x-1)[(x-1)^4-1]=0;$$

$$(x-1)[(x-1)^2+1][(x-1)^2-1]=0.$$

$x=1$; $x=2$; $x=0$, но корень $x=0$ посторонний.

705. $4\sqrt{2}x^3-20x^2+12x\sqrt{2}-2x^2+5x\sqrt{2}-6=0;$

$$2x\sqrt{2}\,(2x^2-5x\sqrt{2}+6)-(2x^2-5x\sqrt{2}+6)=0;$$

$(2x\sqrt{2}-1)(2x^2-5x\sqrt{2}+6)=0$. Отсюда $x_1=\sqrt{2}$; $x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $x_3=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Можно это уравнение решить несколько иначе, введя новое неизвестное $y=x\sqrt{2}$, тогда данное уравнение примет вид: $2y^3-11y^2+17y-6=0$, левую часть которого разложить на множители: $(2y-1)(y^2-5y+6)=0$.

706. Введем вспомогательное неизвестное: $y=\sqrt{x^2+20}$, получим уравнение: $y^2+y=42$; $y_1=-7$ — посторонний корень; $y_2=6$, отсюда $x=\pm 4$.

707. Обе части уравнения возведем в куб, воспользовавшись формулой: $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$. Получим: $8x+4-8x+4-3\sqrt[3]{64x^2-16}\cdot 2=8$; $x=\pm 0{,}5$.

708. Данное уравнение приводится к квадратному относительно $\sqrt[3]{x}$, решив которое получим: $x_1=8$; $x_2=27$.

709. Область допустимых значений $x\geqslant 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат, затем умножим обе части уравнения на $2(x+3)(x+4)>0$ и разложим на множители полученный многочлен:

$$(x-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)(x+2\sqrt{3}-\sqrt{2x})=0.$$

Получим $x=2\sqrt{3}$, третий сомножитель положителен при любом $x\geqslant 0$ (этот многочлен можно рассматривать как квадратный трехчлен относительно $\sqrt{x}$).

710. $x\neq\frac{1}{b}$; $x\neq\frac{1}{a}$; значит, a и b не нули. Получаем уравнение: $a(1-ax)=b(1-bx)$, или $x(a^2-b^2)=a-b$.

1) $a=b\neq 0$; x — любое число, кроме $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$.

2) $a=-b$; нет решения.

3) $a\neq\pm b$; $a\neq 0$, $b\neq 0$, тогда $x=\frac{1}{a+b}$.

711. При условии $x\pm a\neq 0$ имеем: $x_1=3a$; $x_2=-2a$.

Проверяем: $3a\pm a\neq 0$ при $a\neq 0$.

Ответ: $x_1=3a$; $x_2=-2a$ при $a\neq 0$.

Если $a=0$, то уравнение не имеет решения.

712. $(x-1)(x-2)=(a-1)(a-2)$; $x^2-3x+2=a^2-3a+2$; $x^2-3x-a^2+3a=0$; $x^2-3x+a(3-a)=0$; $x_1=a$; $x_2=3-a$.

713. Из первого уравнения $z=3-x-y$; это значение подставим во второе уравнение, получим: $2xy-2y-(3-x-y)^2=4$; $(x^2-6x+9)+(y^2-4y+4)=0$; $(x-3)^2+(y-2)^2=0$, откуда $x=3$; $y=2$, а следовательно, $z=-2$.

714.

1) $x=1$; $y=0{,}5$.

2) $y=-1$; $x=0{,}5$.

3) $y=-2x$; $x=0$; $y=0$.

4) $x=2y$; это соотношение новых корней не дает.

715. Первое уравнение представляет собой произведение трех сомножителей, равное нулю, отсюда $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2y$. Значение x_1 не является корнем второго уравнения. Если $x=1$, то $y=-3$; если $x=2y$, то $y=-0{,}375$; $x=-0{,}75$.

716.

$$\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2-19)=0;\\(x+y)(x^2-xy+y^2-7)=0.\end{cases}$$

1) $x=y$, тогда $2x(x^2-7)=0$

$$\begin{cases}x_1=0;\\y_1=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\sqrt{7};\\y_2=\sqrt{7};\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=-\sqrt{7};\\y_3=-\sqrt{7}.\end{cases}$$

2) $x=-y$; $\begin{cases}x_4=-\sqrt{19};\\y_4=\sqrt{19};\end{cases}\quad\begin{cases}x_5=\sqrt{19};\\y_5=-\sqrt{19}.\end{cases}$

3) $x\neq y$; $x\neq -y$; $\begin{cases}x^2+xy+y^2=19;\\x^2-xy+y^2=7.\end{cases}$

Отсюда $xy=6$, значит,

$$\begin{cases}x^2+2xy+y^2=25;\\x^2-2xy+y^2=1;\end{cases}\quad\begin{cases}(x+y)^2=25;\\(x-y)^2=1.\end{cases}$$

а) $\begin{cases}x+y=5;\\x-y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=5;\\x-y=-1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x+y=-5;\\x-y=1;\end{cases}$

г) $\begin{cases}x+y=-5;\\x-y=-1;\end{cases}$

$$\begin{cases}x_6=3;\\y_6=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_7=2;\\y_7=3;\end{cases}\quad\begin{cases}x_8=-2;\\y_8=-3;\end{cases}\quad\begin{cases}x_9=-3;\\y_9=-2.\end{cases}$$

Итак, данная система имеет 9 решений.

717. $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{37}{13}$; $12x^2-25xy+12y^2=0$; $x=\frac{3}{4}y$; $x=\frac{4}{3}y$.

1) $x=\frac{3}{4}y$; $\left(\frac{9}{16}y^2+\frac{3}{4}y^2+y^2\right)\sqrt{\frac{19y^2}{16}+y^2}=1480$.

$$\pm\frac{37}{16}y^2\cdot\frac{5}{4}y=1480;\quad y^3=\pm 8\cdot 64;\quad y=\pm 8;$$

если $x_1=6$, то $y_1=8$; если $x_2=-6$, то $y_2=-8$.

2) $x=\frac{4}{3}y$; $\left(\frac{16}{9}y^2+\frac{4}{3}y^2+y^2\right)\sqrt{\frac{16y^2}{9}+y^2}=1480$.

$$y=\pm 6;\quad \begin{cases} x_3=8; \\ y_3=6; \end{cases}\quad \begin{cases} x_4=-8; \\ y_4=-6. \end{cases}$$

718. Введем вспомогательные неизвестные:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a; \\ xy=b. \end{cases}$$

Тогда данная система примет вид:

$$\begin{cases} 5(a^2-2b^2)=17a; \\ a-b=7. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{cases} a_1=5; \\ b_1=-2; \end{cases}\quad \begin{cases} a_2=19{,}6; \\ b_2=12{,}6. \end{cases}$$

Теперь имеем две системы:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5; \\ xy=-2; \end{cases}\quad \begin{cases} x^2+y^2=19{,}6; \\ xy=12{,}6. \end{cases}$$

Первая из этих систем имеет 4 решения: $(2;\ -1)$, $(-2;\ 1)$, $(1;\ -2)$ и $(-1;\ 2)$, а вторая не дает целых корней.

719. $\begin{cases} x_1=3; \\ y_1=2; \end{cases}\quad \begin{cases} x_2=-5; \\ y_2=2. \end{cases}$

720. Заменим $\frac{3x}{x+y}=z$, тогда $z^2-2z+1=0$; $z=1$. Получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{3x}{x+y}=1; \\ xy-54=x+y. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1=6; \\ y_1=12; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-4{,}5; \\ y_2=-9. \end{cases}$$

721. Напишем дроби, обратные данным:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xyz}=\frac{1}{2}; \\ \frac{y+z}{xyz}=\frac{5}{6}; \\ \frac{x+z}{xyz}=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Числители дробей разделим почленно на знаменатели, получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{2}; \\ \frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{5}{6}; \\ \frac{1}{yz}+\frac{1}{xy}=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Сложим все три уравнения и разделим обе части уравнения на 2:

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}=1.$$

Сравнивая последнее уравнение с каждым из предыдущих, получим:

$$\frac{1}{xy}=\frac{1}{2};\ \frac{1}{xz}=\frac{1}{3};\ \frac{1}{yz}=\frac{1}{6};\ \begin{cases} xy=2; \\ xz=3; \\ yz=6. \end{cases}$$

Перемножив все эти уравнения, получим $(xyz)^2=36$, отсюда $xyz=\pm 6$.

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ y_1 = 2; \\ z_1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1; \\ y_2 = -2; \\ z_2 = -3. \end{cases}$$

722. $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - xy = 4; \\ (x + y) + xy = 2. \end{cases}$

$$\begin{cases} (x + y)^2 - xy = 4; \\ x + y + xy = 2. \end{cases}$$

$(x + y)^2 + (x + y) = 6$. Решим квадратное уравнение относительно $(x + y)$.

$(x + y)^2 + (x + y) - 6 = 0$; $(x + y)_1 = -3$; $(x + y)_2 = 2$.

Заметим, что эти два уравнения не составляют систему.

Получим систему:

1. $\begin{cases} x + xy + y = 2; \\ x + y = -3. \end{cases}$ или $\begin{cases} xy = 5; \\ x + y = -3. \end{cases}$

Эта система не имеет действительных решений.

2. $\begin{cases} x + xy + y = 2; \\ x + y = 2. \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 0; \\ x + y = 2. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2; \\ y_1 = 0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 0; \\ y_2 = 2. \end{cases}$

723. $\begin{cases} x_1 = -2; \\ y_1 = -4. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 1\frac{2}{3}; \\ y_2 = 3\frac{1}{3}. \end{cases}$

724. $x = 18$; $y = 2$. В левой части первого уравнения вынести $\sqrt{x}$, а во второй $\sqrt{y}$ и разделить одно уравнение на другое, что возможно, так как в правой части каждого из уравнений не нули.

725. Сложим оба уравнения:

$$2x^2 + 8y^2 + 8xy = 200;$$
$$x^2 + 4y^2 + 4xy = 100;$$
$$(x + 2y)^2 = 100;$$
$$x + 2y = 10.$$

$x + 2y = -10$ не удовлетворяет условию задачи, так как $x > 0$, $y > 0$.

Теперь опять вернемся к данным уравнениям: вычтем из первого уравнения второе

$$2y^2 + 8z^2 + 8yz = 50;$$
$$y^2 + 4yz + 4z^2 = 25;$$
$$(y + 2z)^2 = 25;$$

$y + 2z = 5$, так как $y > 0$, $z > 0$, то $y + 2z \neq -5$.

$$\begin{cases} x + 2y = 10; & x + 10 - 4z = 10; \quad x = 4z; \\ y + 2z = 5. & z = 1; \; x = 4; \; y = 3. \end{cases}$$

Так как $y > 0$, то $5 - 2z > 0$; $z < 2\frac{1}{2}$; $0 < z < 2\frac{1}{2}$.

$$z_1 = 1; \quad z_2 = 2;$$
$$x_1 = 4; \quad x_2 = 8;$$
$$y_1 = 3; \quad y_2 = 1.$$

726. $x_1 = 25$; $y_1 = 36$; $x_2 = 36$; $y_2 = 25$.

Второе уравнение умножим на 3 и сложим с первым, получим куб суммы чисел $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$, а левая часть первого уравнения — сумма кубов этих же чисел.

727. Левая часть первого уравнения легко раскладывается на множители: $(y + 3)(x - y) = 0$.

Данная система распадается на две:

$$\begin{cases} y + 3 = 0; \\ x^2 - 5x + 2y^2 - 12 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - y = 0; \\ x^2 - 5x + 2y^2 - 12 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 2; \\ y_1 = -3. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 3; \\ y_2 = -3. \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = 3; \\ y_3 = 3. \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -\frac{4}{3}; \\ y_4 = -\frac{4}{3}. \end{cases}$

728. Сложим все уравнения, сократим на 3, получим $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 0$, а так как $x_1 + x_2 + x_3 = 6$; $x_4 + x_5 + x_6 = -3$; $x_1 + x_7 + x_8 = -2$, то $6 - 3 - 2 - x_1 = 0$; $x_1 = 1$.

Аналогично $\begin{cases} 1 + (x_2 + x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7) + x_8 = 0; \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9; \\ x_5 + x_6 + x_7 = -9. \end{cases}$

Отсюда $1 + 9 - 9 + x_8 = 0$; $x_8 = -1$.

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = -4$, $x_6 = -3$; $x_7 = -2$; $x_8 = -1$.

729. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 0$.

730. I способ (рис. 165)

$y = x$ — биссектрисса 1-го и 3-го координатных углов; $y = x + 3$ — построенная прямая смещается влево на 3 единицы.

$y = |x + 3|$ — все значения $y = x + 3$ при $x < -3$ (отрицательные значения y) отображаются симметрично относительно оси ox.

II способ (рис. 166)

1) $x < -3$; $y = -x - 3$;

2) $x \geqslant -3$; $y = x + 3$.

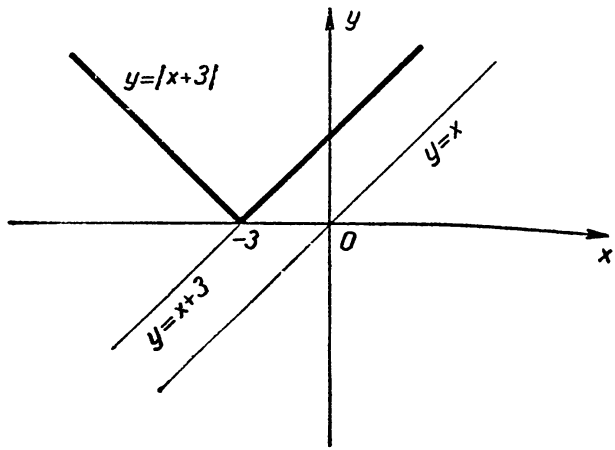


Рис. 165

731. (Рис. 167.)

732. (Рис. 168.)

733. $y = x^2$ — парабола, проходящая через начало координат.

$y = x^2 - 4$ — парабола, все точки которой спущены на 4 единицы вниз по сравнению с $y = x^2$ (рис. 169).

Если $x^2 - 4 \geqslant 0$; $x^2 \geqslant 4$; $|x| \geqslant 2$, то $y = x^2 - 4$, т. е. при $|x| \geqslant 2$; $y = |x^2 - 4| = x^2 - 4$.

Если $x^2 - 4 < 0$; $|x| < 2$; то
$y = 4 - x^2$, т. е. $y = |x^2 - 4| = 4 - x^2$.

734. (Рис. 170).

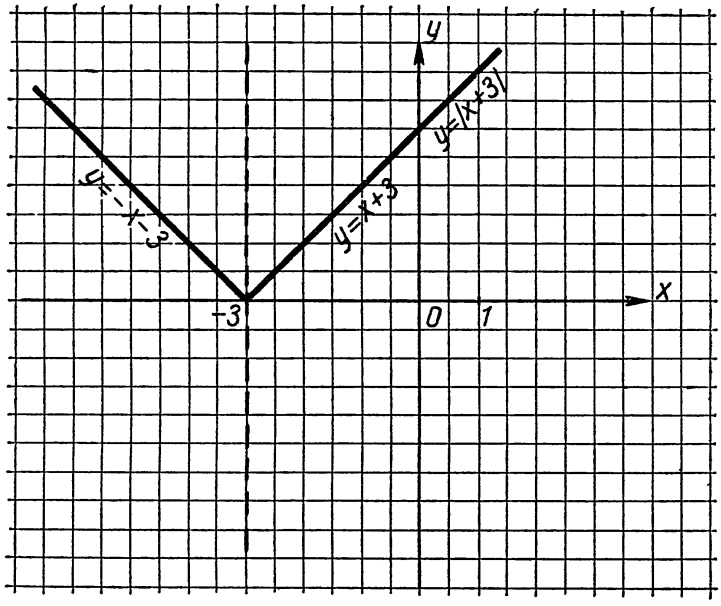


Рис. 166

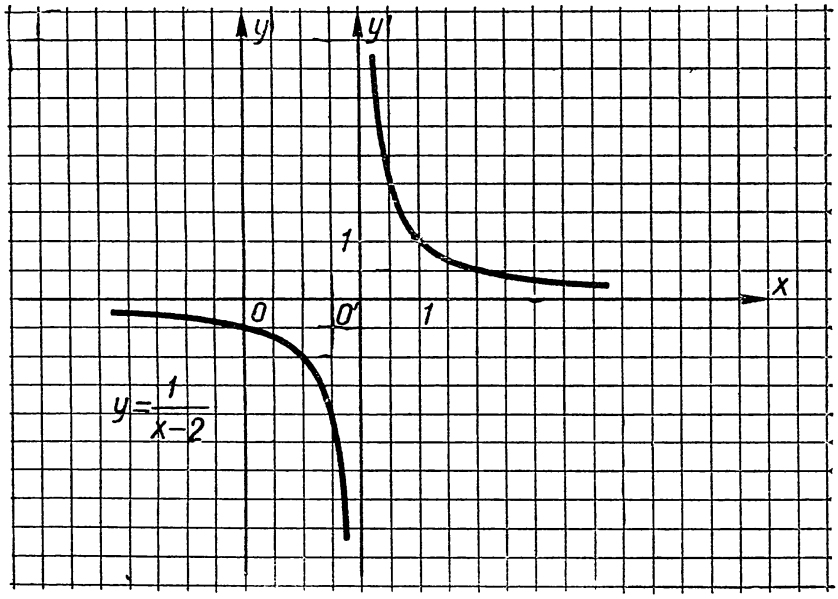


Рис. 167

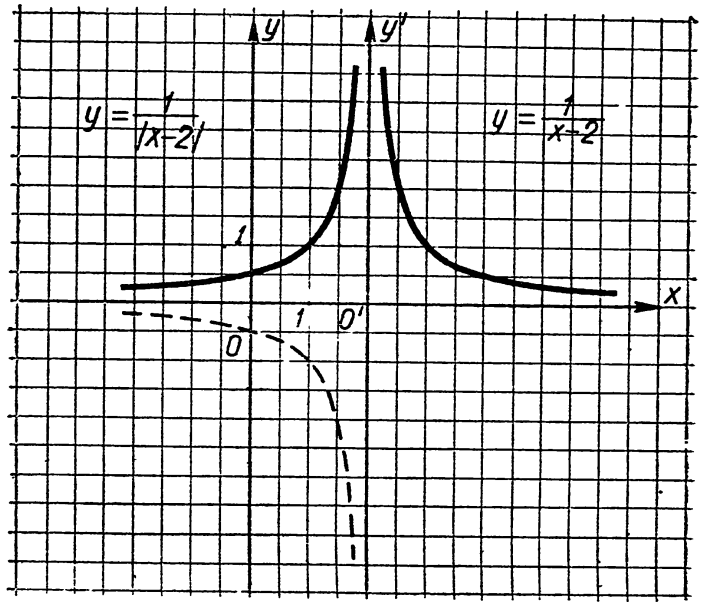


Рис. 168

735. (Рис. 171.)
736. (Рис. 172.)
737. (Рис. 173.)
738. (Рис. 174.)
1) $x<0$; $y=-x-x=-2x$.
2) $x\geqslant 0$; $y=x-x=0$.
739. (Рис. 175.)
740. $y=|x+1|-|x-1|$ (рис. 176).
1) $x<-1$; $y=-x-1-(-x+1)=-x-1+x-1=-2$;
2) $-1\leqslant x<1$; $y=x+1-(-x+1)=x+1+x-1=2x$;
3) $x\geqslant 1$; $y=x+1-(x-1)=x+1-x+1=2$.
741. (Рис. 177.)
1) $x<2$; $y=-x+2-x+3=-2x+5$;
2) $2\leqslant x<3$; $y=x-2-x+3=1$;
3) $x\geqslant 3$; $y=x-2+x-3=2x-5$.
742. (Рис. 178.)
1) $x<1$; $y=1-x-(-x+2)-(-x+3)$; $y=x-4$.
2) $1\leqslant x<2$; $y=-1+x-(-x+2)-(-x+3)$; $y=3x-6$.
3) $2\leqslant x<3$; $y=x-1-x+2-(-x+3)$; $y=x-2$.
4) $x\geqslant 3$; $y=x-1-(x-2)-(x-3)$; $y=-x+4$.

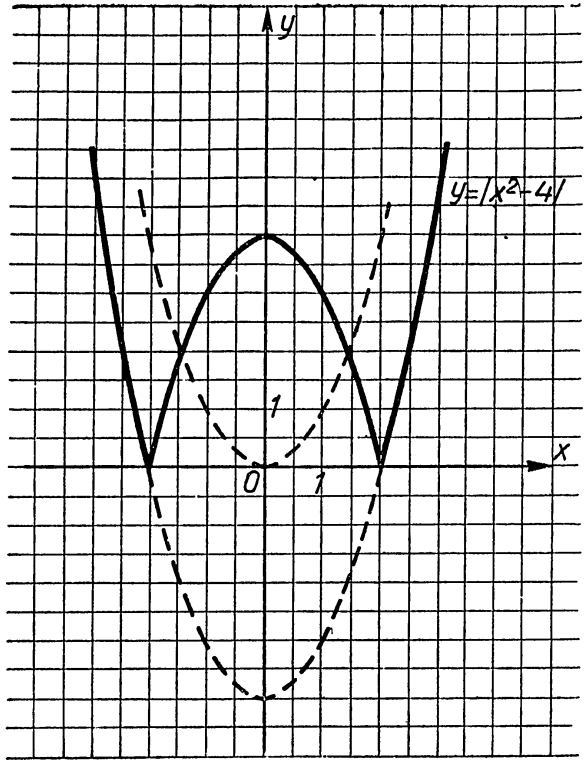


Рис. 169

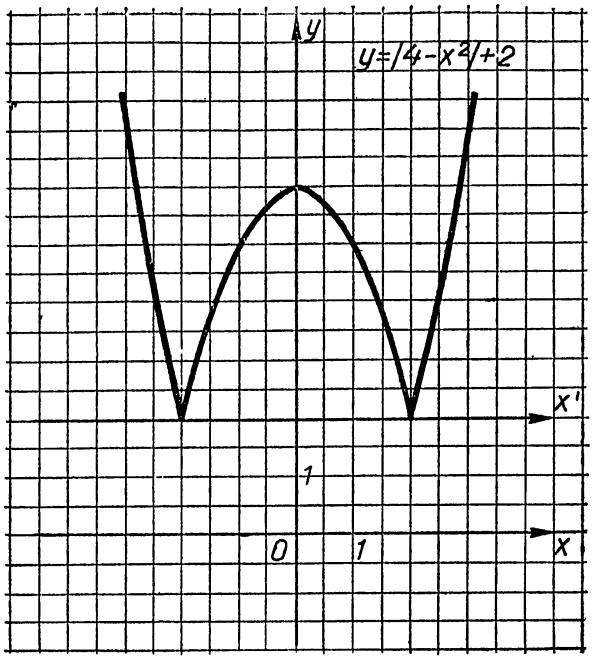


Рис. 170

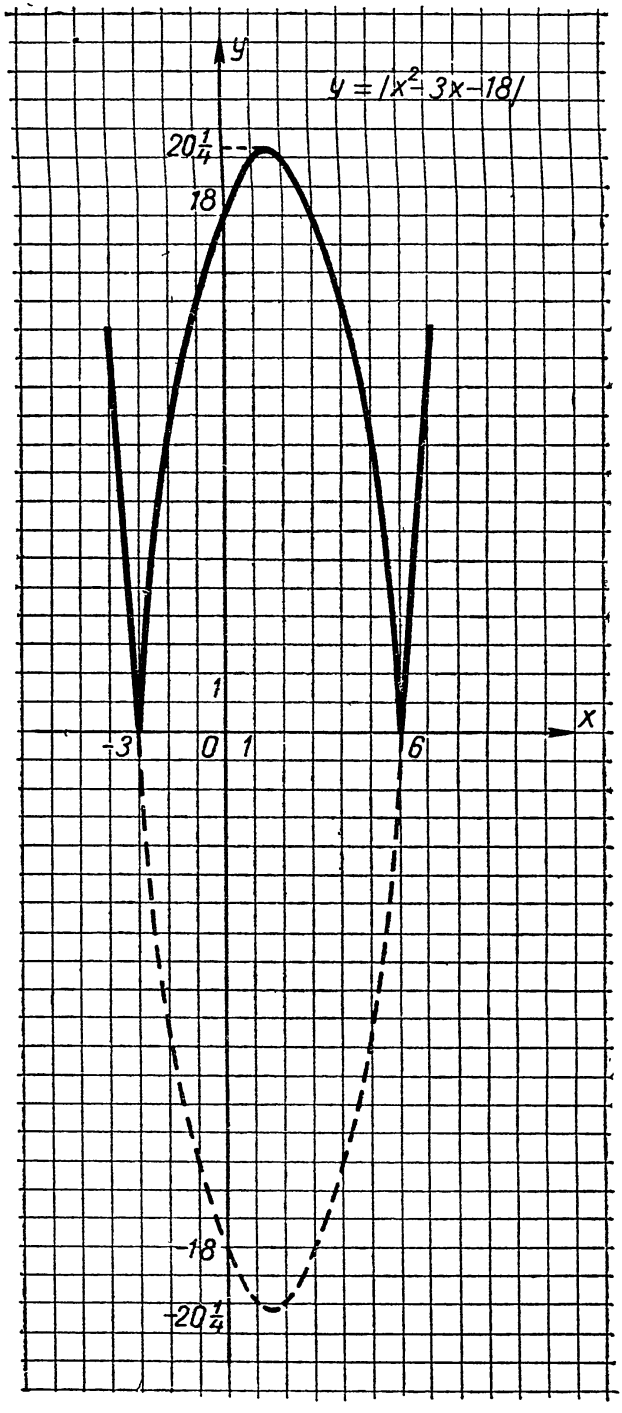


Рис. 171

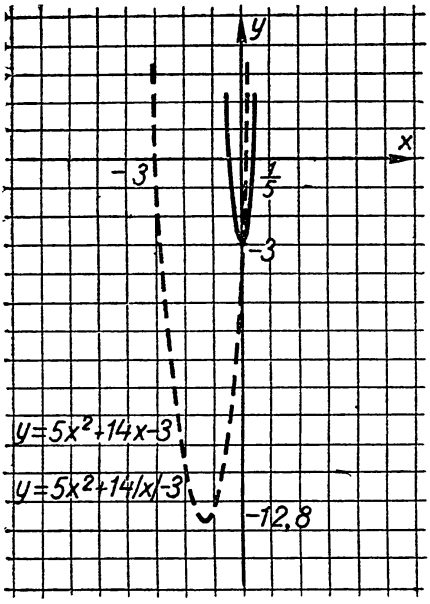


Рис. 172

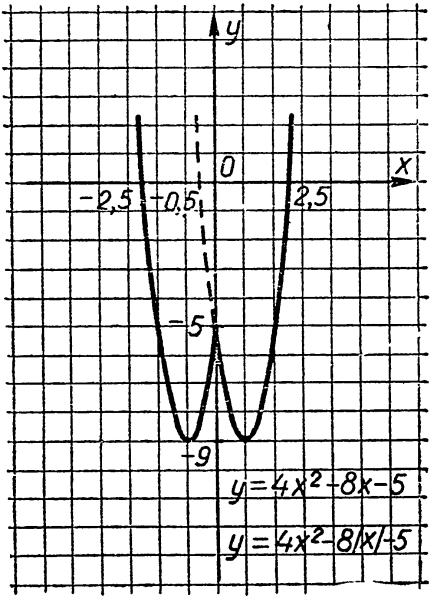


Рис. 173

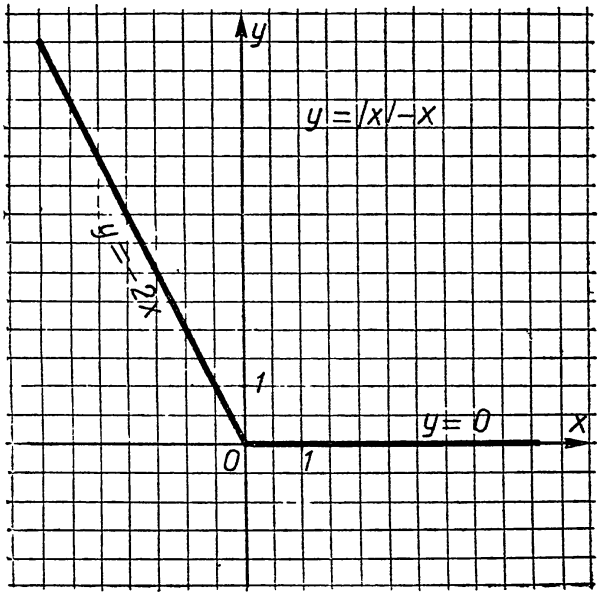


Рис. 174

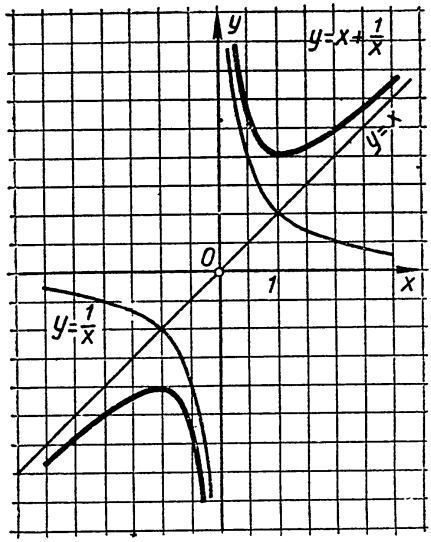


Рис. 175

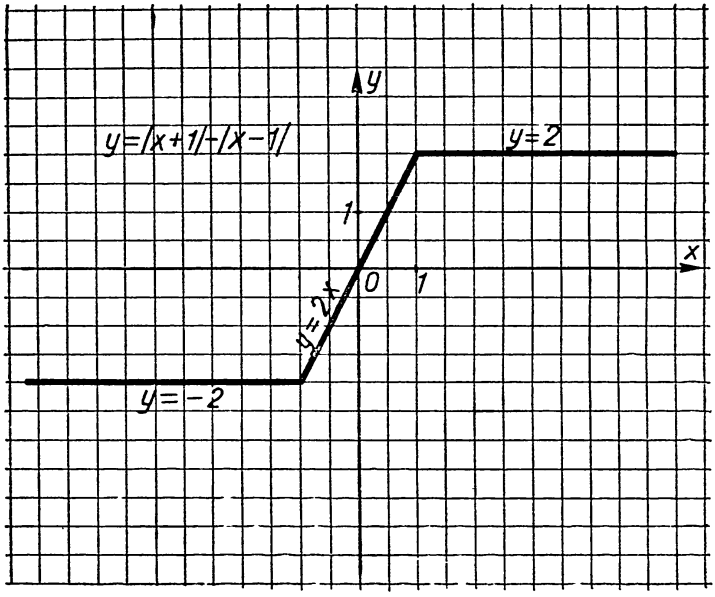


Рис. 176

743. (Рис. 179.) 1) $x \geqslant 0$, тогда $y=(x+1)(x-1)=$ $=x^2-1$. 2) $x<0$, тогда $y=-(x+1)^2$.

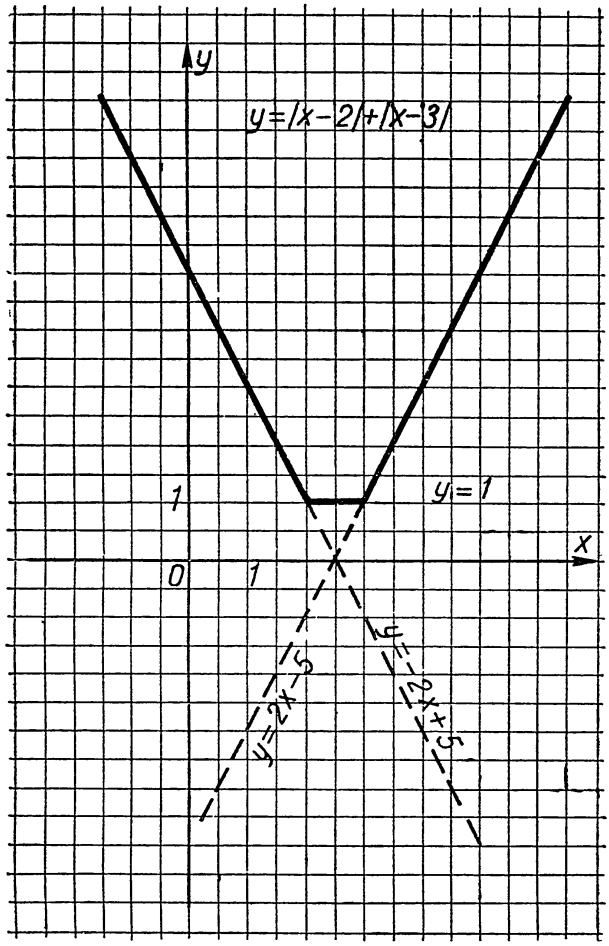


Рис. 177

744. (Рис. 180.) 1) $x<0$, тогда $y=(-x+1)(-x-1)=$ $=x^2-1$.

2) $0 \leqslant x<1$, тогда $y=(-x+1)(x-1)=-(x-1)^2$.

3) $x \geqslant 1$, тогда $y=(x-1)^2$.

745. (Рис. 181.) 1) $x<-2$, тогда $y=(-x+1)(-x-2)=-(x-1)(x+2)$.

2) $-2 \leqslant x<1$, тогда $y=(-x+1)(x+2)=$ $=-(x-1)(x+2)$.

3) $x \geqslant 1$, тогда $y=(x-1)(x+2)$.

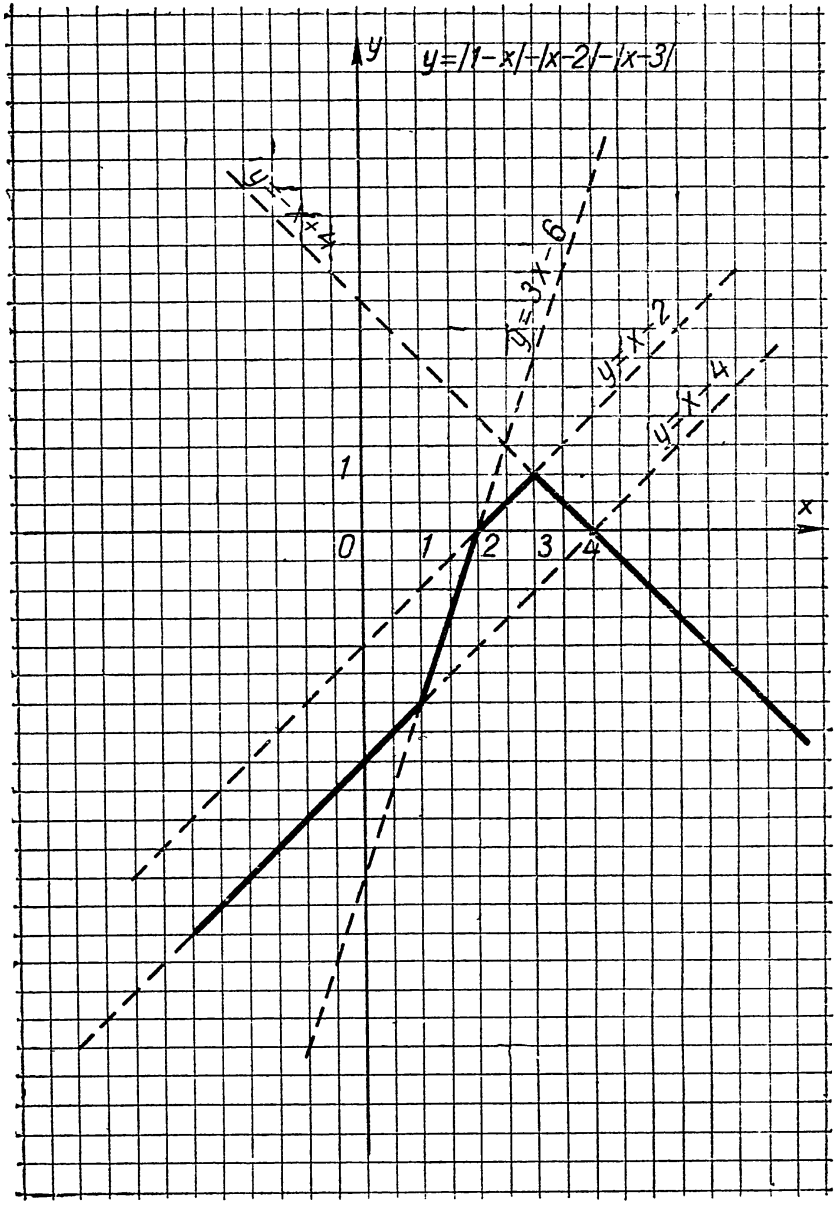


Рис. 178

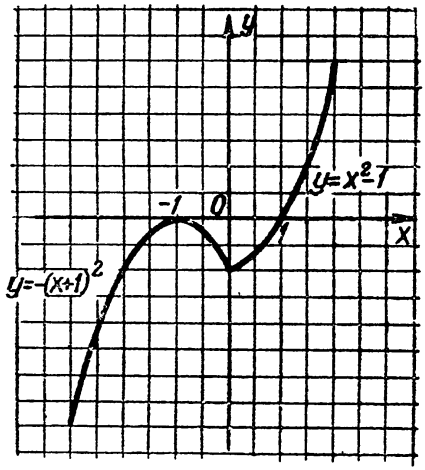


Рис. 179

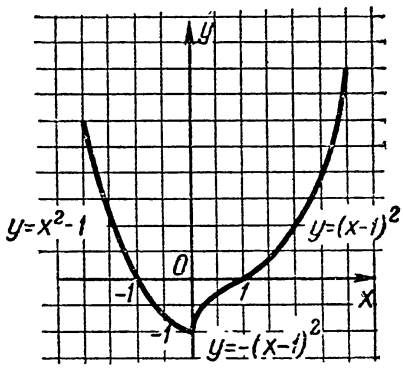


Рис. 180

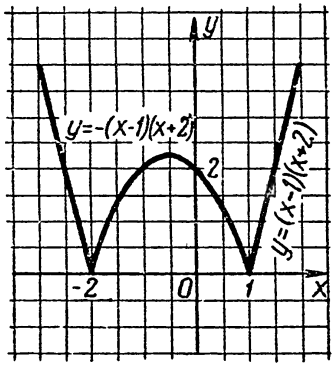


Рис. 181

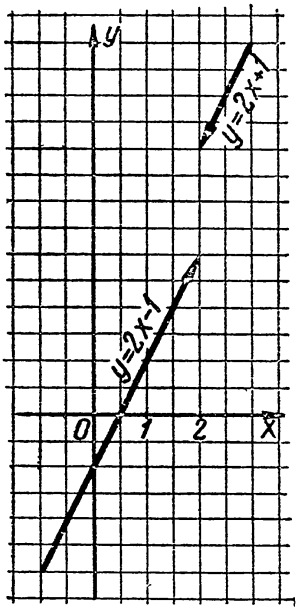


Рис. 182

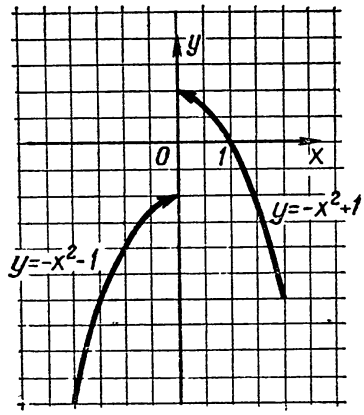


Рис. 183

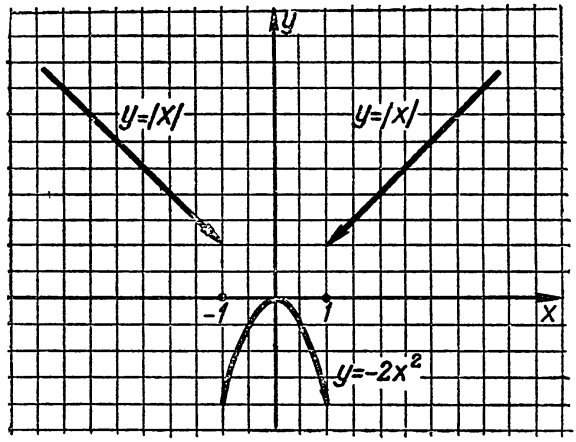


Рис. 184

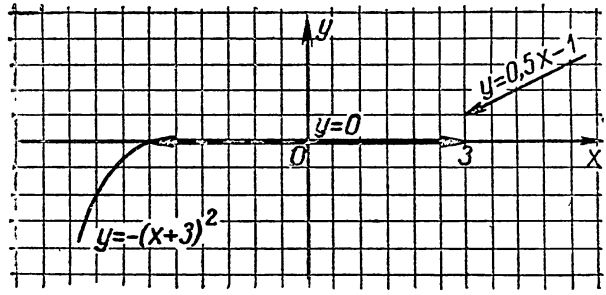


Рис. 185

746. (Рис. 182.) 1) $x<2$, тогда $y=2x-1$.
2) $x>2$, тогда $y=2x+1$.

747. (Рис. 183.) 1) $x<0$, тогда $y=-x^2-1$.
2) $x>0$, тогда $y=1-x^2$.

748. (Рис. 184.) **749.** (Рис. 185.)

750. I способ (аналитический)

Так как $x\neq 0$, то $x^3+4x-16=0$; $(x^3-8)+(4x-8)=0$; $(x-2)(x^2+2x+8)=0$; $x=2$.

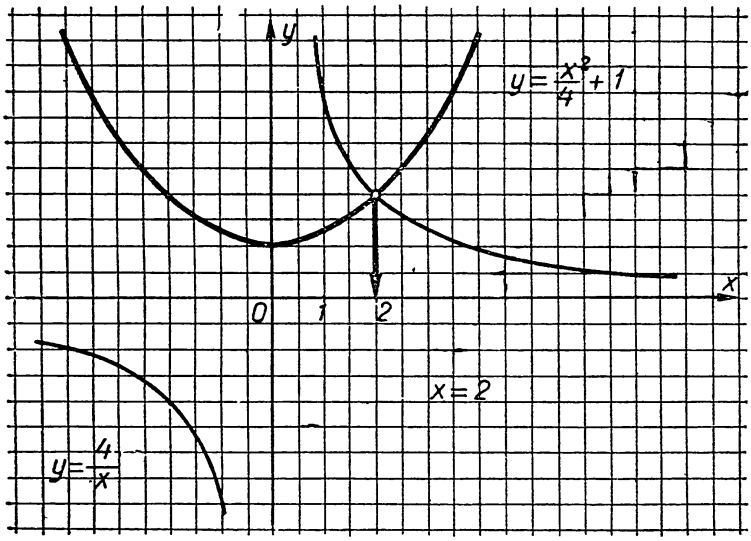


Рис. 186

Уравнение $x^2+2x+8=0$ не имеет действительных корней.

II способ (графический)

Преобразуем уравнение $\frac{x^2}{4}+1=\frac{4}{x}$ и построим графики функций $y=\frac{x^2}{4}+1$ и $y=\frac{4}{x}$ (рис. 186). Абсциссы точек пересечения графиков дадут корни уравнения.

751. Так как $(c-a)^3=-(a-c)^3$ и $a-c=(b-c)+(a-b)$, то $(b-c)^3-[(b-c)+(a-b)]^3+(a-b)^3=-3(b-c)^2(a-b)-3(b-c)(a-b)^2=-3(b-c)(a-b)(a-c)$.

752. Выделим полный куб двучлена:
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc=$
$=[(a+b)+c](a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)-3ab(a+b+c)=$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$

753. $(a+b)^3+3(a+b)^2\cdot c+3(a+b)\cdot c^2+c^3-a^3-b^3-$
$-c^3=(a+b)^3+3(a+b)^2\cdot c+3(a+b)\cdot c^2-(a^3+b^3)=$
$=(a+b)[(a+b)^2+3(a+b)c+3c^2-a^2+ab-b^2]=$
$=(a+b)[a^2+2ab+b^2+3ac+3bc+3c^2-a^2+ab-b^2]=$
$=(a+b)[3ab+3ac+3bc+3c^2]=3(a+b)(ab+ac+bc+$
$+c^2)=3(a+b)[a(b+c)+c(b+c)]=3(a+b)(b+c)(a+c).$

754. $a^3+b^3+c^3=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)=(a+b+$
$+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b)=-3ab(a+b)=$
$=3abc;\ a+b=-c.$

755. $(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+15=(x^2+8x+7)(x^2+$
$+8x+15)+15=y(y+8)+15=(y+5)(y+3).$ Но
$y=x^2+8x+7.$ Тогда $(x^2+8x+7+5)(x^2+8x+7+3)=$
$=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)=(x+2)(x+6)\cdot(x^2+8x+10).$

756. $2^k+2^{k+1}+2^{k+2}=2^k(1+2+2^2)=2^k\cdot 7$ делится на 7.

757. $x^3+3x^2-x-3=x^2(x+3)-(x+3)=(x+3)\times$
$\times(x-1)(x+1).$

Если $x=2a-1$, где a — натуральное число, то
$(2a-2)\cdot 2a(2a+2)=8(a-1)a(a+1).$

$(a-1)\cdot a(a+1)$ — произведение трех последовательных натуральных чисел, это произведение делится на 6, а $8a(a+1)(a-1)$ делится на 48.

758. $n^{12}-n^8-n^4+1=n^8(n^4-1)-(n^4-1)=(n^4-$
$-1)(n^8-1)=(n^4-1)^2(n^4+1)=(n^4+1)(n^2+1)^2\cdot(n^2-1)^2=$
$=(n^4+1)(n^2+1)^2\cdot(n-1)^2\cdot(n+1)^2,\ n=2a-1.$
$[(2a-1)^4+1][(2a-1)^2+1]^2(2a-1-1)^2(2a-1+1)^2=$
$=[(4a^2-4a+1)^2+1](4a^2-4a+2)^2(2a-2)^2\cdot 4a^2=[(4a^2-$
$-4a)^2+2(4a^2-4a)+2]\cdot 4(2a^2-2a+1)^2\cdot 4(a-1)^2\cdot 4a^2=$
$=2[2(2a^2-2a)^2+(4a^2-4a)+1]\cdot 4(2a^2-2a+1)^2\cdot 4\times$
$\times 4(a-1)^2\cdot a^2.$

$(a-1)a$ — произведение двух последовательных натуральных чисел, значит, оно делится на 2, поэтому $(a-1)^2a^2$ делится на 4. Итак, данное выражение делится на $2\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4$, т. е. на 512.

759. $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=n^3-3n^2+3n-1+n^3+$
$+n^3+3n^2+3n+1=3n(n^2+2).$

$3n(n^2+2)$ делится на 3, остается доказать, что $n(n^2+2)$ делится на 3.

1) Если n делится на 3, то все доказано.

2) Если $n=3k+1$,

$(3k+1)^2+2=9k^2+6k+1+2=9k^2+6k+3=3(3k^2+2k+1)$, т. е. и в случае, если n при делении на 3 дает в остатке 1, то $3n(n^2+2)$ делится на 9.

3) Если $n=3k+2$, то $(3k+2)^2+2=9k^2+12k+4+2=9k^2+12k+6=3(3k^2+4k+2)$ делится на 3, т. е. в случае, если n при делении на 3 дает в остатке 2, $3n(n^2+2)$ делится на 9.

760. Пусть пять последовательных чисел $a-2$, $a-1$, a, $a+1$, $a+2$, где a — целое число, тогда сумма квадратов этих чисел

$$(a-2)^2+(a-1)^2+a^2+(a+1)^2+(a+2)^2=a^2-4a+4+a^2-2a+1+a^2+a^2+2a+1+a^2+4a+4=5a^2+10=5(a^2+2).$$

Чтобы $5(a^2+2)$ было квадратом целого числа, надо, чтобы (a^2+2) делилось бы на 5, т. е. a^2+2 оканчивалось или нулем, или 5. Тогда число a^2 должно иметь крайней справа цифру 8 или 3, но нет целого числа, квадрат которого оканчивается на 8 или на 3.

761. Пусть даны два числа a и b, которые при делении на c дают остатки, равные r, тогда

$$a=c\cdot q+r \text{ и}$$
$$b=cp+r.$$

Составим разность чисел a и b: $a-b=cq+r-cp-r=cq-cp=c(q-p)$ — делится на c.

762. $2a$, $2b$, где a и b — целые числа — два четных числа

$$\frac{(2a)^2+(2b)^2}{2}=2a^2+2b^2=(a+b)^2+(a-b)^2.$$

763. $2n+1=a^2+b^2$ (n, a, b — целые числа, $a\neq b$)

$$\frac{2n+1}{2}=\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{2(a^2+b^2)}{4}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

764. $a+b+c$.

1) Можно использовать результат № 752.

2) Если учащиеся знакомы с делением расположенных многочленов, то можно рекомендовать разделить многочлен, стоящий в числителе, на многочлен, стоящий в знаменателе.

765. I способ

$$(x^2-11x+28)(x^2-11x+30)=1680.$$

Обозначим $x^2 - 11x + 28$ через y, тогда $y(y+2) = 1680$,

$$y^2 + 2y - 1680 = 0.$$

$y_1 = 40$; $y_2 = -42$;	$x^2 - 11x + 28 = -42$;
$x^2 - 11x + 28 = 40$;	$x^2 - 11x + 70 = 0$;
$x^2 - 11x - 12 = 0$;	$D < 0$.
$x_1 = 12$; $x_2 = -1$.	Нет решения.

II способ

В левой части равенства — произведение четырех последовательных целых чисел.

$1680 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$, или $1680 = (-5)(-6)(-7)(-8)$, значит, наименьший из сомножителей $x - 7 = 5$; $x_1 = 12$, или $x - 7 = -8$; $x_2 = -1$.

766. $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + 1{,}001 = (x^2 - 5x + 4)^2 + 2(x^2 - 5x + 4) + 1 + 0{,}001 = (x^2 - 5x + 4 + 1)^2 + 0{,}001 = (x^2 - 5x + 5)^2 + 0{,}001 > 0$.

767. $(x - y)(x + y) = 105$. Так как x и y целые положительные, то $x > y$, а, значит, $x - y < x + y$.

$x - y < \sqrt{105} \approx 10$.

$x - y$ — делители числа 105, не превосходящие 10, т. е. $x - y = 1$; $x - y = 3$; $x - y = 5$; $x - y = 7$.

Отсюда получаем системы уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 1; \\ x + y = 105, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad x_1 = 53; \quad y_1 = 52.$$

$$\begin{cases} x - y = 3; \\ x + y = 35, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad x_2 = 19; \quad y_2 = 16.$$

$$\begin{cases} x - y = 5; \\ x + y = 21, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad x_3 = 13; \quad y_3 = 8.$$

$$\begin{cases} x - y = 7; \\ x + y = 15, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad x_4 = 11; \quad y_4 = 4.$$

768. $\begin{cases} x_1 + x_2 = a - 2; \\ x_1 \cdot x_2 = -a - 3. \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a - 2)^2 + 2(a + 3) = a^2 - 2a + 10 = (a - 1)^2 + 9$.

При $a = 1$ $x_1^2 + x_2^2$ принимает наименьшее значение.

769. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = a^2 - 2(a-1) =$
$= (a-1)^2 + 1.$

Наименьшее значение $x_1^2 + x_2^2$ принимает при $a = 1$.

770. $y = \frac{x^4 + x^2 + 5}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^2 - (x^2+1) + 5}{(x^2+1)^2} = 1 - \frac{1}{x^2+1} +$
$+ \frac{5}{(x^2+1)^2}$ — это выражение представляет собой квадратный трехчлен относительно $z = \frac{1}{x^2+1}$; $y = 5z^2 - z +$
$+ 1 = \frac{1}{5}\left(5z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{20}$.

$y_{\min} = \frac{19}{20}$ при $5z - \frac{1}{2} = 0$; $z = 0{,}1$; отсюда $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{10}$.

При $x = \pm 3$ y имеет наименьшее значение, равное 0,95.

771. Пусть $AB = x$ (рис. 187), тогда $AD = 100 - x$, а площадь равна $x(100 - x)$.

$S = x(100 - x) = -x^2 + 100x = -(x^2 - 100x) =$
$= -(x^2 - 2 \cdot 50x + 2500 - 2500) = -[(x-50)^2 - 2500] =$
$-(x-50)^2 + 2500.$

$S_{\max} = 2500$ при $x = 50$, т. е. наибольшую площадь из данных прямоугольников имеет квадрат со стороной в 50 *м*.

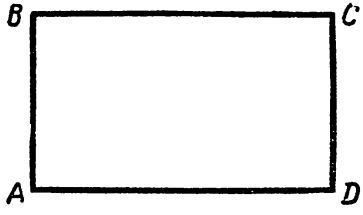


Рис. 187

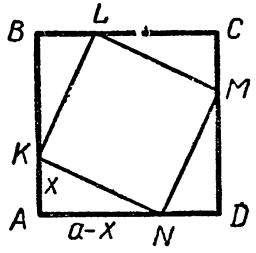


Рис. 188

772. $AK = BL = CM = DN = x$ (рис. 188), $BK = CL =$
$= DM = AN = a - x$.

Нетрудно доказать, что таким образом построенный четырехугольник $KLMN$ является квадратом, площадь которого равна $x^2 + (a-x)^2 = y$.

Рассмотрим полученную функцию и найдем ее наименьшее значение

$$y = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2\left[x^2 - ax + \frac{a^2}{2}\right] =$$

$$= 2\left[x^2 - 2x \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}\right] =$$

$$= 2\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\right] = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2};$$

$y_{\min} = \frac{a^2}{2}$ при $x = \frac{a}{2}$, т. е. точки K, L, M и N находятся на середине сторон AB, BC, CD и AD, то полученный квадрат имеет наименьшую площадь.

773. $a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2}\right) =$

$= \left(a + \frac{1}{a}\right)\left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 3\right]$ — целое число.

Например, 1) $a = 1$; $a + \frac{1}{a} = 2$; $a^3 + \frac{1}{a^3} = 2$;

2) $a = 2 - \sqrt{3}$; $a + \frac{1}{a} = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} +$

$+ 2 + \sqrt{3} = 4$; $a^3 + \frac{1}{a^3} = 52$;

3) $a = 5 + 2\sqrt{6}$; $a + \frac{1}{a} = 5 + 2\sqrt{6} + \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} =$

$= 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} = 10$; $a^3 + \frac{1}{a^3} = 10(10^2 - 3) =$

$= 10 \cdot 97 = 970$.

774. $y + 1 = \dfrac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^2 - \frac{1}{x^2}} + 1 = \dfrac{2x^2}{x^2 - \frac{1}{x^2}};$

$$y - 1 = \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^2 - \frac{1}{x^2}} - 1 = \frac{\frac{2}{x^2}}{x^2 - \frac{1}{x^2}}.$$

Отсюда $\dfrac{y+1}{y-1} = x^4$; $z = \dfrac{x^4 + \frac{1}{x^4}}{x^4 - \frac{1}{x^4}} = \dfrac{y^2 + 1}{2y}$.

775. Решение аналогично предыдущему, т. е. сначала вычисляем $y+1$ и $y-1$, затем находим $\frac{y+1}{y-1}$.

776. $3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ac=0$;

$$D=(a+b+c)^2-3ab-3bc-3ac=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=$$
$$=0{,}5(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2)=$$
$$=0{,}5[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0.$$

777. Для того чтобы выполнялось условие данной задачи, дискриминант должен быть числом отрицательным.

$$D=(a+b+c)^2-3(a^2+b^2+c^2)=$$
$$=-2a^2-2b^2-2c^2+2ab+2ac+2bc=$$
$$=-(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc)=$$
$$=-[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]<0,$$

если из чисел a, b и c по крайней мере два не равны между собой.

778. По условию $y\geqslant 0$. Возведем обе части равенства в квадрат, получим: $xy=y^2$ или $y(x-y)=0$.

1) $y=0$, тогда $x\geqslant 0$; 2) $x=y$, причем оба положительные.

779. По условию $x\geqslant 0$ и, кроме того, $x>y$.

Возведем обе части данного равенства в квадрат, получим: $xy=0$.

1) Если $x=0$, то $y\leqslant 0$; 2) если $y=0$, то $x\geqslant 0$.

780. $\frac{2xz}{x+z}=\frac{2ac}{(b+c)(a+b)}:\left(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}\right)=$

$=\frac{2ac}{a^2+c^2+(a+c)b}$; но $b=\frac{2ac}{a+c}$, значит, $\frac{2xz}{x+z}=\frac{2ac}{a^2+c^2+2ac}=$

$=\frac{2ac}{(a+c)^2}=\frac{b}{a+c}$; следовательно, $y=\frac{2xz}{x+z}$.

781. $\frac{16a^{15}}{a^{16}-b^{16}}$.

782. Приведем к общему знаменателю правую часть данного равенства и увидим, что знаменатели дробей, стоящих в левой и правой частях, одинаковы, значит, равны и числители дробей, отсюда и найдем A и B.

$$\frac{3x+3}{(x+2)(x-1)}=\frac{Ax+2A+Bx-B}{(x+2)(x-1)}.$$

$$\begin{cases} A+B=3; \\ 2A-B=3, \text{ получим: } A=2,\ B=1. \end{cases}$$

784. Опишем окружность около данного треугольника ABC (рис. 189) и из точки C проведем: 1) медиану CD, 2) биссектрису CF, 3) высоту CK.

Продолжим CF до пересечения с окружностью в точке E, соединим точку E с точкой D.

Так как $\angle ACE = \angle ECB$, то $\cup AE = \cup EB$, а так как $AD = DB$, то $ED \perp AB$.

Точки D и K — проекции концов CE на AB лежат по разные стороны от точки F во всех случаях, кроме

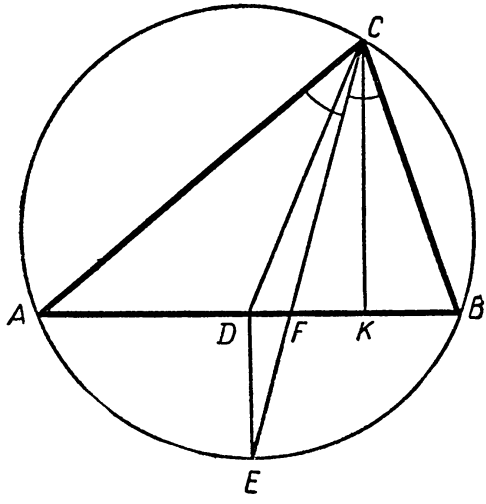


Рис. 189

равнобедренного $\triangle ABC$, когда точки D, F и K совпадают.

785. I способ

1) Продолжим AB на отрезок $BO = AB$ (рис. 190). Соединим O с C.

2) В $\triangle AOC$: $AM = MC$; $AB = BO$, значит, MB — средняя линия, т. е. $BM = \frac{1}{2} OC$.

3) $\triangle DBL = \triangle OBC$ ($DB = OB$; $BL = BC$; $\angle DBL = \angle OBC = 90° + \angle OBL$), значит, $OC = DL$ и $BM = \frac{1}{2} DL$.

II способ

Повернем $\triangle BDL$ около точки B на 90° по часовой стрелке, получим $\triangle OBC$.

ABO — прямая и $AB = BO$, значит, $BM = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2} DL$.

786. 1) Проведем $DM \parallel BF$ (рис. 191) и продолжим BN до пересечения с MD, соединим M с F.

2) $DB \perp AB$, $MB \perp AC$, значит, $\angle MBD = \angle BAC$ (углы с соответственно перпендикулярными сторонами).

3) $\angle DBF + \angle ABC = 180°$, но и $\angle MDB + \angle DBF = 180°$, значит, $\angle ABC = \angle MDB$.

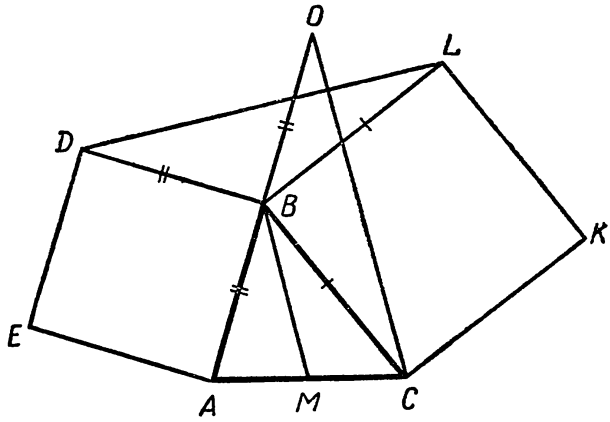


Рис. 190

4) Так как $DB = AB$, то $\triangle MDB = \triangle ABC$, $DM = BC = BF$, следовательно, $DBFM$ — параллелограмм и $DK = KF$.

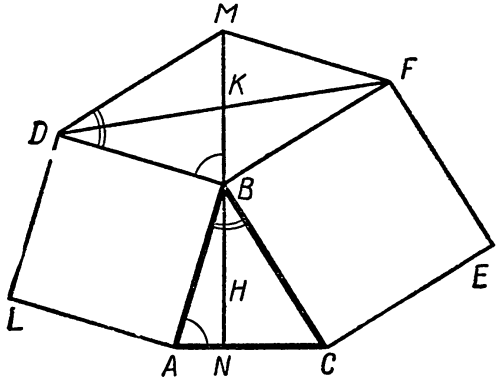


Рис. 191

787. Пусть $\triangle ABC$ — искомый (рис. 192), а BM — высота, BL — биссектриса, BK — медиана этого треугольника. Так как BL — биссектриса $\angle ABC$, то $\angle ABL = \angle LBC$, эти углы вписанные, а значит, и $\cup AL = \cup CL$. Сое-

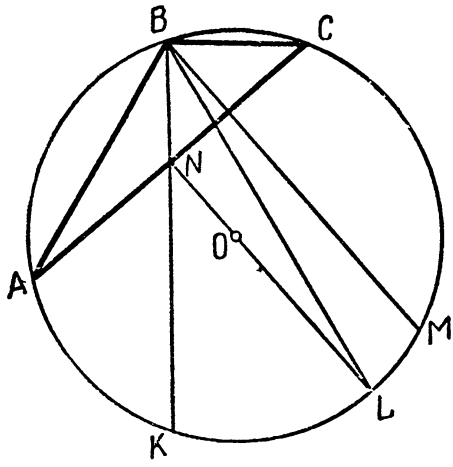


Рис. 192

диним L с центром O окружности, описанной около данного треугольника, тогда OL пересекается с AC в точке N, где $AN = NC$ и $OL \parallel BM$ (высота). Отсюда построение.

Через данные три точки пересечения продолжений медианы (K), биссектрисы (L) и высоты (M) с окружностью, описанной около искомого треугольника, строим эту окружность. Ее центр—O. Соединим точку L с O и из точки M проведем прямую, параллельную OL и пересекающую окружность в точке B.

Это та вершина треугольника, из которой проведены медиана, биссектриса и высота.

Соединим B с K. Через точку N (пересечение OL с BK) проведем $AC \perp BM$. Треугольник ABC — искомый.

788. Пусть $\triangle ABC$ — искомый (рис. 193), около него описана окружность. Его высоты CC_1, BB_1 и AA_1, пересекающиеся в точке K, продолжены и пересекают окружность в точках D, F и E. Соединив эти точки, получим $\triangle EDF$. Докажем, что BF — биссектриса $\angle EFD$.

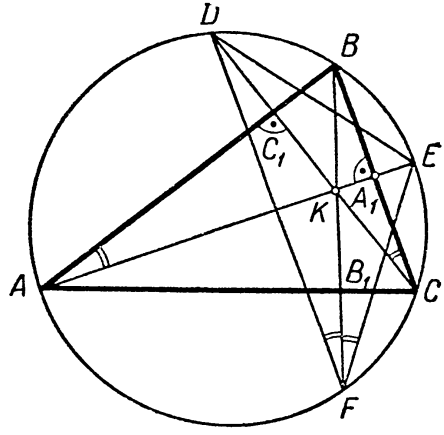


Рис. 193

$\angle BAE = \angle BCD$, как углы с соответственно перпендикулярными сторонами ($CD \perp AB$, $CB \perp AE$), значит, $\cup BD = \cup BE$, а тогда $\angle DFB = \angle BFE$, т. е. BF делит пополам $\angle EFD$.

Аналогично доказывается, что CD — биссектриса $\angle FDE$ и AE — биссектриса $\angle DEF$.

Построение. В условии задачи даны точки D, E и F. Соединяем их и описываем около $\triangle DEF$ окружность. Проводим биссектрисы $\triangle DEF$. Продолжая их до пересечения с окружностью, получим вершины A, B и C искомого $\triangle ABC$. Точка K — пересечение биссектрис $\triangle DFE$ — есть в то же время точка пересечения высот $\triangle ABC$.

Докажем для примера, что $CC_1 \perp AB$.

$\angle AC_1C$ измеряется $\frac{1}{2}(\cup AF + \cup CF + \cup BD)$.

Из того, что EA — биссектриса $\angle DEF$, следует $\cup AF = \cup AD$, точно так же $\cup FC = \cup EC$, $\cup BD = \cup BE$. Отсюда $\cup AF + \cup FC + \cup BD = \cup EC + \cup BE + \cup AD = 180°$, значит, $\angle AC_1C = 90°$, т. е. $CC_1 \perp AB$.

Примечание. То, что BF биссектриса $\angle EFD$, можно доказать другим способом.

$\angle AC_1C$ изм. $\frac{1}{2}(\cup BD + \cup AC)$ и $\angle AA_1C$ изм. $\frac{1}{2}(\cup BE + \cup AC)$. $\angle AC_1C = \angle AA_1C$, следовательно, $\cup BD + \cup AC = \cup BE + \cup AC$, отсюда $\cup BD = \cup BE$. Но тогда $\angle DFB = \angle BFE$, т. е. BF — биссектриса $\angle EFD$.

789. Эта задача вполне сходна с предыдущей. В анализе ее решения надо продолжить биссектрисы искомого $\triangle DEF$ (рис. 193) до пересечения с описанной окружностью и доказать, что $FB \perp AC$, $DC \perp AB$ и $EA \perp BC$.

Построение проводится в следующем порядке:

1) строится $\triangle ABC$, 2) описывается около него окружность, 3) проводятся в нем высоты и продолжаются до пересечения с окружностью. Так будут получены вершины D, E и F — искомого треугольника.

790. Соединим точку A с концами данного диаметра BC (рис. 194), точки пересечения прямых AB и AC с окружностью (точки D и E) соединим с B и C. Получим $\angle BDC = \angle BEC = 90°$ (вписанные углы, опирающиеся на диаметр), значит, в $\triangle ABC$ BE и DC — высоты, которые пересекаются в точке M, следовательно, и третья высота этого треугольника пройдет через точку M. Отсюда AN — высота $\triangle ABC$, т. е. $AN \perp BC$.

791. 1) $\angle ABD = 60°$ (рис. 195); $\angle CBD_1 = 60°$, значит, $\angle DBC = \angle ABD_1 = 120°$.

2) $\triangle BDC = \triangle ABD_1$ ($AB = BD$; $BC = BD_1$; $\angle ABD_1 = \angle DBC = 120°$).

Следовательно, $AD_1 = CD$; $\angle 1 = \angle 2$; $MC = ND_1$.

3) $\triangle BMC = \triangle BND_1$ ($ND_1 = MC$; $BD_1 = BC$; $\angle 1 = \angle 2$). Значит, $BN = BM$; $\angle NBD_1 = \angle MBC$.

4) $\angle MBC + \angle D_1BM = 60°$; $\angle NBD_1 + \angle D_1BM = 60°$, т. е. $\angle NBM = 60°$.

5) В $\triangle NBM$: $NB = BM$, $\angle NBM = 60°$, следовательно, $\triangle NBM$ — равносторонний.

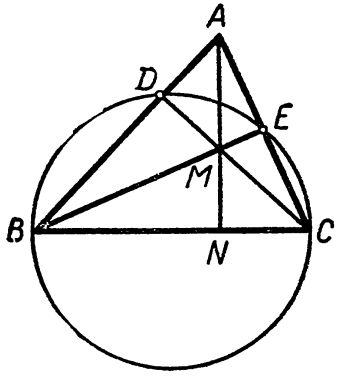


Рис. 194

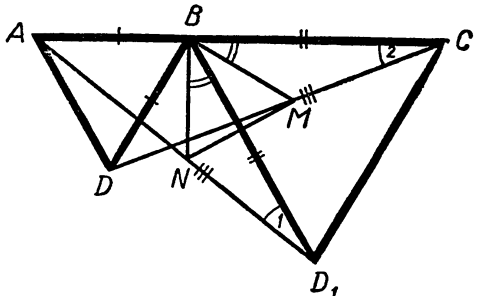


Рис. 195

792. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{AL^2}{LC^2} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^2 = \left(\frac{BC\sqrt{2}}{BC}\right)^2 = 2$ по теореме о биссектрисе внутреннего угла.

793. I способ

1) $BKDE$ — параллелограмм (рис. 196), так как $BK = DE$ и $BK \parallel DE$, поэтому $PR \parallel ML$, $AOCN$ — параллелограмм, т. е. $LP \parallel RM$, значит, $LPRM$ — параллелограмм.

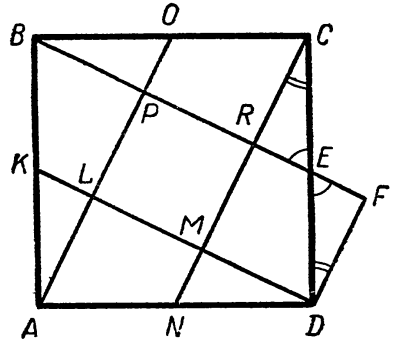


Рис. 196

2) $\triangle AKD = \triangle ABO = \triangle NCD = \triangle BCE$ по двум катетам, следовательно, $\angle RCE = \angle ADK$, но $\angle ADK + \angle MDC = 90°$, значит, $\angle MDC + \angle RCE = 90°$, значит, $\angle CMD = 90°$ и $\angle LMR = 90°$, т. е. $LPRM$ — прямоугольник.

3) Так как $AN = ND$ и $AO \parallel NC$, то $ML = MD$. Но $AP = DL$ (из равенства пря-

моугольных треугольников ALD и ABP по гипотенузе и острому углу), значит, $LM = LP$, т. е. $LPRM$ — квадрат, следовательно (обозначив $AB = a$; $LP = x$), $S_{ABCD} : S_{LPRM} = a^2 : x^2$.

4) Проводим через точку D прямую параллельную NC до пересечения с продолжением BE в точке F. Из предыдущего следует $LP = DF = RF = x$, а из равенства треугольников DEF и ERC (по гипотенузе и острому углу) $RE = EF = 0{,}5x$.

5) Из прямоугольного $\triangle DEF$: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$ отсюда $a^2 = 5x^2$ и $a^2 : x^2 = 5 : 1$.

Итак, $S_{ABCD} : S_{LPRM} = 5 : 1$.

II способ

После того как доказано, что $BE \parallel KD$ и $AO \parallel CN$ и $AL = LP$; $BP = PR$; $CR = RM$ и $DM = ML$ надо провести медиану BL в $\triangle ABP$ (рис. 197) и аналогично в треугольниках BRC, CMD и DAL, а также диагональ PM. Затем применить способ решения задачи 798. Квадрат $ABCD$ оказался разбитым на 10 равновеликих треугольников. Для большей ясности даем другой чертеж.

794. $S_{DEF} : S_{ABC} = 1 : 7$ (рис. 198).

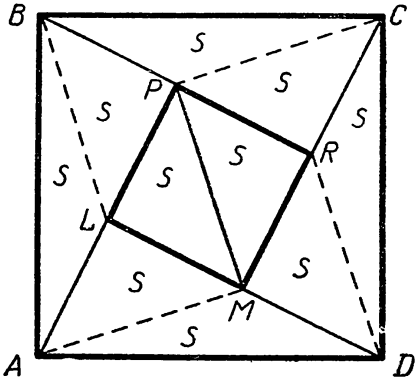


Рис. 197

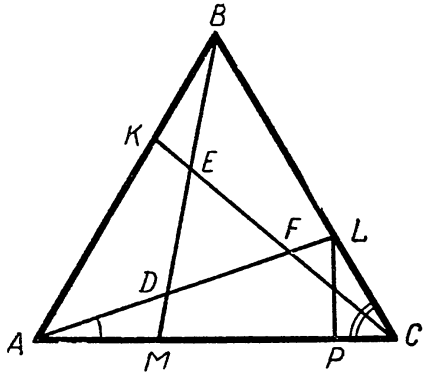


Рис. 198

795. Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника, поэтому (рис. 199)

$$S_{EBFD} = S_{EBD} + S_{BDF} = \frac{1}{2} S_{ABD} + \frac{1}{2} S_{DBC} =$$

$$= \frac{1}{2}(S_{ABD} + S_{DBC}) = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

796. 1) Соединим O с A, B и C (рис. 200).

2) $S_{AOC}=\frac{b\cdot h_b}{2}$; $S_{BOC}=\frac{a\cdot h_a}{2}$; $S_{AOB}=\frac{c\cdot h_c}{2}$; $S_{ABC}=$ $=\frac{b\cdot h_b}{2}+\frac{a\cdot h_a}{2}+\frac{c\cdot h_c}{2}$; $2S_{ABC}=bh_b+ah_a+ch_c$.

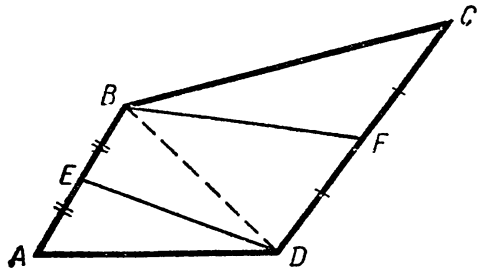


Рис. 199

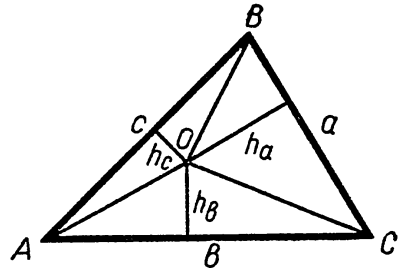


Рис. 200

797. (Рис. 201.) $S_1+S_2=\frac{ah_1}{2}+\frac{ah_2}{2}=\frac{a}{2}(h_1+h_2)=$ $=\frac{a}{2}\cdot H=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ (H — высота параллелограмма); S_1+ $+S_2=S_3+S_4$.

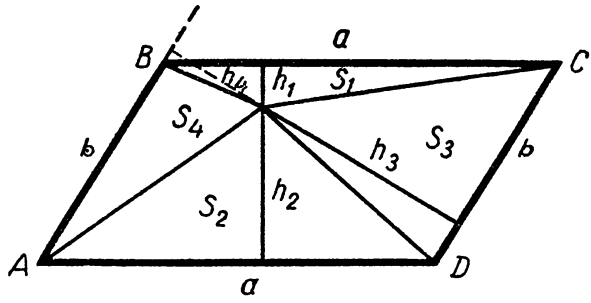


Рис. 201

798. Проведем диагональ BD (рис. 202) и соединим точки B и Q. $\triangle QAB$ и $\triangle ABD$ равновелики, так как $QA=$ $=AD$, а вершина B — общая. Треугольники QMB и QBA — тоже равновелики (Q — общая, $BA=MB$), следовательно, $S_{AQM}=2S_{ABD}$, аналогично
$S_{PNC}=2S_{BDC}$, т. е. $S_{AQM}+S_{NCP}=2S_{ABCD}$

Проведя диагональ AC, докажем, что

$S_{BMN}+S_{QDP}=2S_{ABCD}$, тогда $S_{PQMN}=5S_{ABCD}$.

799. Сначала докажем, что $\angle B=\alpha$, $\angle C=\beta$, $\angle A=\gamma$ (рис. 203).

$$S_{AEOD}=AE\cdot AD\cdot\sin A;$$

$$S_{DOM}=\frac{DO\cdot OM\cdot\sin\alpha}{2};$$

$$S_{OFBK}=BF\cdot BK\cdot\sin B;$$

$$S_{EFO}=\frac{OF\cdot OE\sin\beta}{2};$$

$$S_{MOLC}=MC\cdot CL\cdot\sin C;$$

$$S_{OKL}=\frac{OL\cdot KO\cdot\sin\gamma}{2};$$

$$\frac{S_{AEOD}\cdot S_{OFBK}\cdot S_{MOLC}}{S_{DOM}\cdot S_{EFO}\cdot S_{OKL}}=8.$$

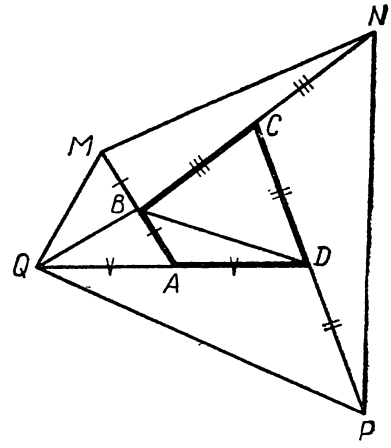


Рис. 202

800. Пусть через M (рис. 204) проведены два отрезка $ED(EM=MD)$ и какой-нибудь $FN(FM\neq MN)$. Докажем, что $S_{BDE}<S_{BFN}$.

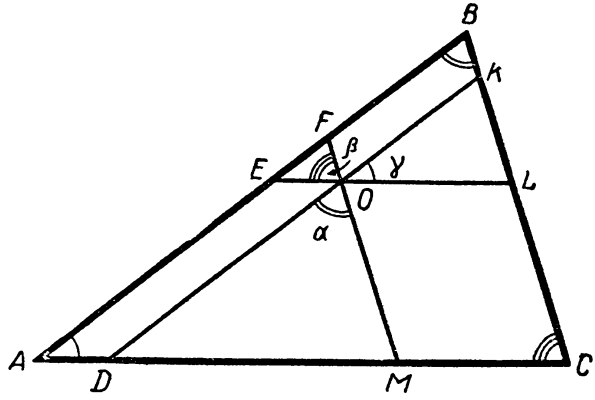


Рис. 203

Проведем $EP\parallel BD$, $\triangle EMP=\triangle FMD$. Следовательно, $S_{EMP}=S_{FMD}$ и $S_{FMD}<S_{MEN}$. S_{BDE} состоит из S_{BFME} и S_{FMD}, а S_{BFN} из той же S_{BFME} и S_{MEN}, но так как $S_{FMD}<S_{MEN}$, значит, и $S_{BDE}<S_{BFN}$.

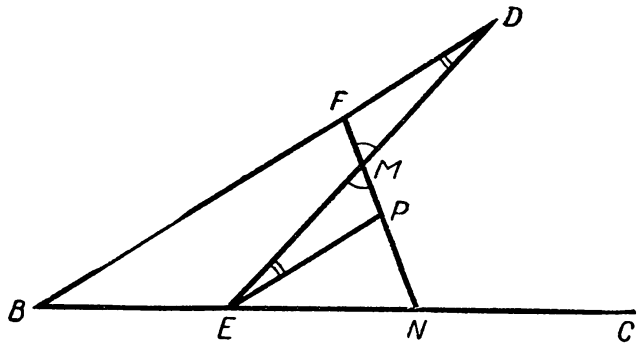


Рис. 204

801. 1) $\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = 2$ (рис. 205). Пусть $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $CE = h$, $BE = x$.

2) $S_{ABD} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$; значит, $S_{ABC} = \frac{c^2\sqrt{3}}{8}$.

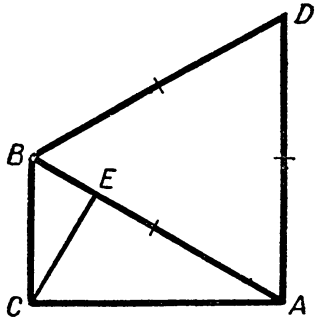


Рис. 205

3) $S_{ABC} = \frac{c \cdot h}{2}$; $\frac{c \cdot h}{2} = \frac{c^2\sqrt{3}}{8}$;

$h = \frac{c\sqrt{3}}{4}$.

4) $\frac{BE}{CE} = \frac{CE}{AE}$; $\frac{x}{h} = \frac{h}{c-x}$;

$h^2 = x(c-x)$; $\frac{3c^2}{16} = x \cdot c - x^2$;

$16x^2 - 16cx + 3c^2 = 0$; $x_1 = \frac{c}{4}$;

$x_2 = \frac{3c}{4}$.

5) $\triangle BCE$; если $x = \frac{c}{4}$, то $\operatorname{tg} B = \frac{CE}{BE} = \frac{c\sqrt{3} \cdot 4}{4 \cdot c} = \sqrt{3}$; $\angle B = 60°$, то $\angle A = 30°$. Если $x = \frac{3c}{4}$, то $\angle B = 30°$, $\angle A = 60°$.

802. 1) AO — биссектриса $\angle BAD$ (рис. 206), значит, $AB : AD = BO : OD = 2 : 1$; пусть $AD = x$, тогда $AB = 2x$.

2) $\triangle ABD$ прямоугольный, $4x^2 - x^2 = 9$; $x = \sqrt{3}$; $AD = \sqrt{3}$; $AB = BC = 2\sqrt{3}$.

3) $\triangle BDC$; $CD = \sqrt{21}$.

803. I способ (рис. 207).

$$S_{ABC}=\frac{BC\cdot AC}{2}=\frac{(m+r)(n+r)}{2}=\frac{mn+mr+nr+r^2}{2}=$$

$$=\frac{mn}{2}+\frac{mr}{2}+\frac{nr}{2}+\frac{r^2}{2}=\frac{mn}{2}+\frac{1}{2}S_{ABC};$$

$$S_{ABC}=\frac{mn}{2}+\frac{1}{2}S_{ABC};$$

$$\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{mn}{2};\quad S_{ABC}=mn.$$

II. способ

По теореме Пифагора:

$(m+r)^2+(n+r)^2=(m+n)^2;$

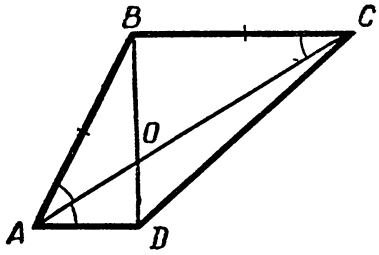


Рис. 206

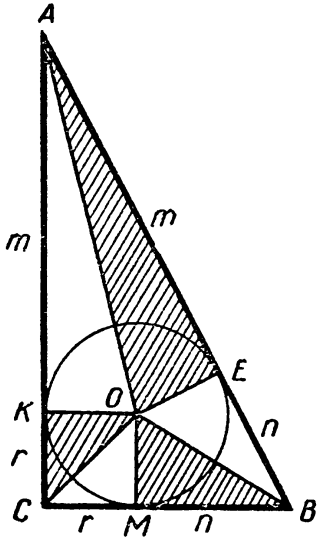


Рис. 207

$n^2+2nr+r^2+m^2+2mr+r^2=m^2+2mn+n^2;\ nr+r^2+mr=$
$=mn;\ S_{ABC}=nr+mr+r^2=mn.$

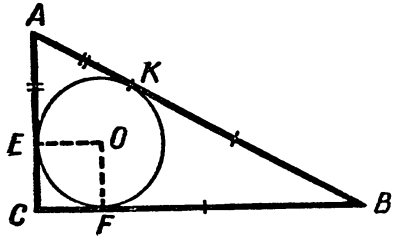


Рис. 208

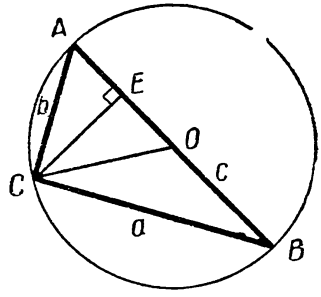


Рис. 209

804. Воспользуемся результатом задачи № 803 и найдем площадь этого треугольника; она будет равна 60 *кв. см* (рис. 208).

Таким образом, $0{,}5BC \cdot AC = 60$. $(r+5)(r+12) = 120$; где r — радиус вписанного круга. Отсюда $r = 3$, а катеты $AC = 8$ и $BC = 15$.

805. Анализ. Пусть треугольник ABC построен, тогда $a : CO = CO : b$, т. е. $ab = \frac{c^2}{4}$, но $S_{ABC} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c^2}{8} = \frac{c \cdot H}{2}$, отсюда $H = \frac{c}{4}$, т. е. CE меньше гипотенузы AB в 4 раза, значит, задача сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе и высоте, проведенной на гипотенузу (рис. 209).

Построение. На отрезке AB равном c строим как на диаметре полуокружность (рис. 210), а затем проводим прямую, параллельную AB, на расстоянии, равном $0{,}25c$. Точка пересечения этой прямой с дугой окружности и будет вершиной прямого угла. Треугольник ABC искомый.

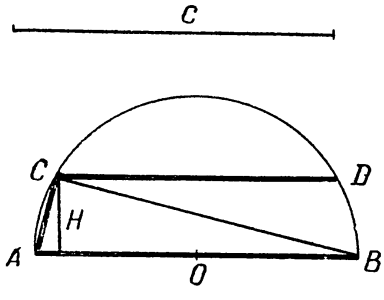


Рис. 210

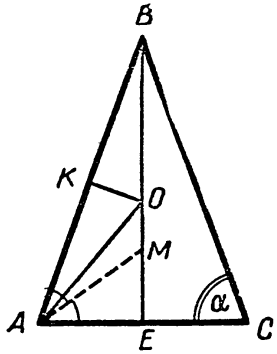


Рис. 211

806. 1) Пусть M — центр вписанного, а O — центр описанного круга (рис. 211), тогда $EM = r$, а $BO = AO = R$.

$$\angle MAE = \frac{\alpha}{2}; \quad AE = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

2) $\angle ABE = 90° - \alpha$; $\angle AOE = 180° - 2\alpha$ ($\angle AOE$ внешний к $\triangle ABO$).

3) $\triangle AOE$; $AO = \frac{AE}{\sin(180° - 2\alpha)} = \frac{r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sin(180° - 2\alpha)}$.

4) $\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sin(180° - 2\alpha)}$.

807. 1) Пусть диагональ $AC = 2R$. Покажем, что проекции сторон AD и BC на диагональ BD равны (рис. 212).

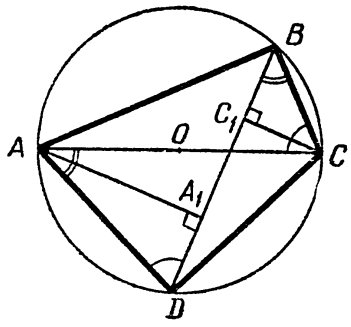


Рис. 212

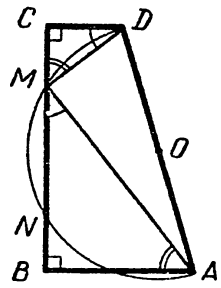


Рис. 213

2) $\triangle AA_1D \sim \triangle ABC$, так как они прямоугольные и $\angle ADA_1 = \angle ACB$ вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу. Значит, $A_1D : AD = BC : AC$, отсюда

$$A_1D = \frac{AD \cdot BC}{AC}. \qquad (1)$$

3) $\triangle BCC_1 \sim \triangle ADC$, так как они оба прямоугольные и $\angle C_1BC = \angle DAC$, значит, $BC_1 : BC = AD : AC$, отсюда

$$BC_1 = \frac{AD \cdot BC}{AC}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $A_1D = BC_1$.

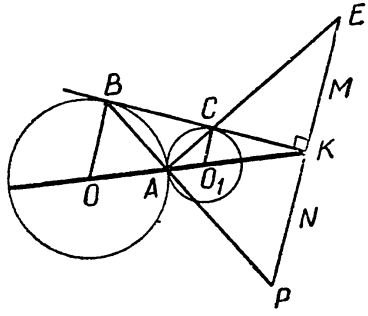


Рис. 214

808. $\triangle CDM \sim \triangle ABM$ (рис. 213), так как они оба прямоугольные и $\angle CDM = \angle AMB$, так как каждый из этих углов в сумме с $\angle CMD$ равен 90° ($\angle AMD$ прямой), значит, $BM : AB = CD : CM$, отсюда $BM \cdot CM = AB \cdot CD$.

809. 1) $MN \parallel BO \parallel CO_1$, так как все три прямые перпендикулярны к BC (рис. 214).

2) $\triangle AKE \sim \triangle ACO_1$, а так как $AO_1 = CO_1$, то $AK = KE$.

3) $\triangle AKP \sim \triangle ABO$, так как $AO = BO$, то $AK = KP$.

Из 2) и 3) следует, что $KP = KE$.

810. I способ (рис. 215).

1) $S_{ABC} = S_{DBC}$, значит, $S_{ABO} = S_{OCD}$.

2) $\frac{S_{ODC}}{S_{BOC}} = \frac{OD}{OB} = \frac{S_{AOD}}{S_{ABO}}$; $S^2_{ODC} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$; $S_{ODC} = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$. $S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

II способ

1) Пусть $OE = h_1$; $OF = h_2$; $BC = a$; $AD = b$.

2) $S_{ABCD} = \frac{(a+b)(h_1+h_2)}{2} = \frac{ah_1 + ah_2 + bh_1 + bh_2}{2}$.

3) $S_1 = \frac{ah_1}{2}$; $S_2 = \frac{bh_2}{2}$.

4) $\triangle BOC \sim \triangle AOD$, значит, $\frac{a}{b} = \frac{h_1}{h_2}$, $ah_2 = bh_1$.

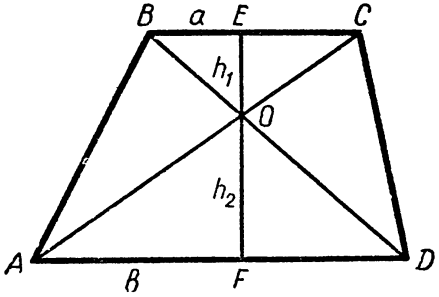


Рис. 215

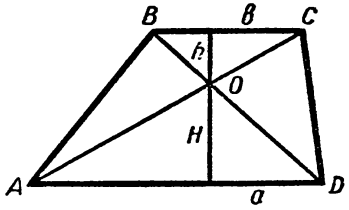


Рис. 216

5) Умножим обе части равенства $ah_2 = bh_1$ сначала на ah_2, а потом на bh_1:

а) $(ah_2)^2 = abh_1h_2$; $ah_2 = \sqrt{abh_1h_2} = \sqrt{2S_1 \cdot 2S_2} = 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}$;

б) $bh_1 = 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

в) $S_{ABCD} = \frac{2S_1 + 2\sqrt{S_1S_2} + 2\sqrt{S_1S_2} + 2S_2}{2} = S_1 + 2\sqrt{S_1S_2} + S_2 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

811. 1) $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot (H + h)$ (рис. 216).

2) $\triangle BOC \sim \triangle AOD$; $\frac{a}{b} = \frac{H}{h}$; $h = \frac{bH}{a}$.

3) $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot \left(H + \frac{bH}{a}\right) = \frac{H(a+b)^2}{2a}$.

4) $S_{AOD} = \frac{aH}{2}$; $\frac{S_{ABCD}}{S_{AOD}} = \frac{(a+b)^2}{a^2}$.

812. Пусть O – пересечение медиан (рис. 217). $BL_1 \perp AC$; $OK \perp AC$; $OM \perp BC$; $OK = y$; $OM = x$.

1) $\triangle OKB_1 \sim \triangle BB_1L_1$: $\frac{OB_1}{BB_1} = \frac{1}{3}$;

$$OK = y; \quad BL_1 = 3y; \quad S_{ABC} = \frac{b \cdot 3y}{2}.$$

2) Аналогично $S_{ABC} = \frac{a \cdot 3x}{2}$;

$$\frac{b \cdot 3y}{2} = \frac{a \cdot 3x}{2}; \quad \begin{cases} ax = by \\ x + y = k \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{bk}{a+b} \\ y = \frac{ak}{a+b}. \end{cases}$$

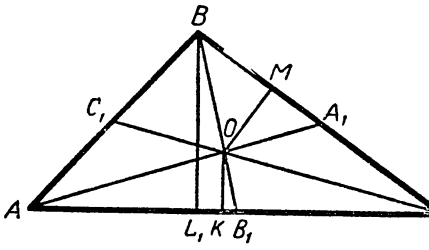


Рис. 217

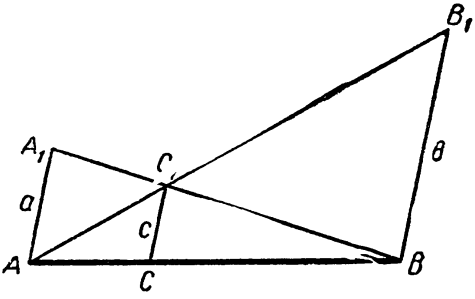


Рис. 218

813. $CC_1 = c$ (рис. 218).

1) $\triangle ACC_1 \sim \triangle AB_1B$: $\frac{AC}{AB} = \frac{c}{b}$.

2) $\triangle BCC_1 \sim \triangle BAA_1$: $\frac{BC}{AB} = \frac{c}{a}$.

3) $\frac{AC}{AB} + \frac{BC}{AB} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$; $1 = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$; $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

814. На основании полученного в предыдущей задаче результата имеем (рис. 219):

$$\frac{1}{EO} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}; \quad \frac{1}{OF} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}; \quad EO = \frac{1}{\frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}};$$

$$OF = \frac{1}{\frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}}; \quad \text{отсюда} \quad EF = \frac{2}{\frac{1}{BC} + \frac{1}{AD}}.$$

815. $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{1}$ (теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника); $AE : EC = AB^2 : BC^2$, значит, $AE : EC = 9 : 1$ (рис. 220).

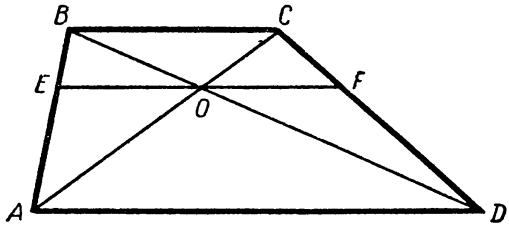


Рис. 219

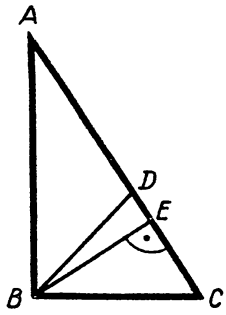


Рис. 220

816. O — пересечение диагоналей (рис. 221). Через точку O проведем $KL \parallel AD$. Из подобия $\triangle ABD$ и $\triangle KBO$:

$$\frac{KO}{AD} = \frac{BK}{AB}. \qquad (1)$$

Из подобия $\triangle ACD$ и $\triangle COL$:

$$\frac{CL}{CD} = \frac{OL}{AD}. \qquad (2)$$

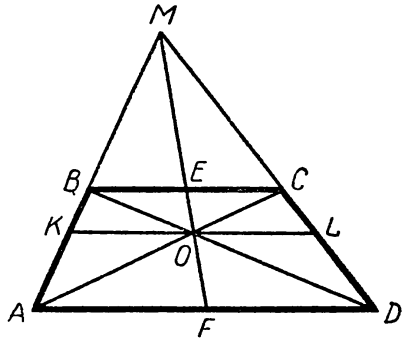


Рис. 221

Проведем через точку O и M — точку пересечения продолжений боковых сторон — прямую, пересекающую BC в точке E и AD в точке F. Стороны угла AMD рассекаются $BC \parallel KL \parallel DA$ на пропорциональные отрезки $\frac{BK}{AB} = \frac{CL}{CD}$, значит, из (1) и (2) следует $\frac{KO}{AD} = \frac{OL}{AD}$, т. е. $KO = OL$. (Это также следует из решения задачи 814). Пучок прямых MA, MF, MD рассекает параллельные прямые BC, KL, AD на пропорциональные отрезки: $\frac{AF}{FD} = \frac{KO}{OL} = \frac{BE}{CE}$, а так как $KO = OL$, то $BE = CE$ и $AF = FD$. Прямая OM проходит через середины оснований трапеции.

817. По условию $\frac{S_{BOC}}{S_{ODC}} = \frac{S_{ODC}}{S_{AOD}}$ (рис. 222).

$\frac{S_{BOC}}{S_{ODC}} = \frac{BO}{OD}$; $\frac{S_{ODC}}{S_{AOD}} = \frac{OC}{AO}$, следовательно, в треугольниках BOC и AOD $\frac{BO}{OD} = \frac{OC}{AO}$ и к тому же $\angle BOC = \angle AOD$, значит, $\triangle BOC \sim \triangle AOD$, тогда $\angle OBC = \angle ODA$, отсюда $BC \parallel AD$, т. е. $ABCD$ — трапеция.

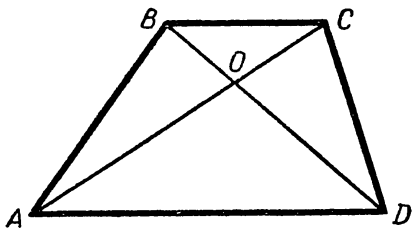


Рис. 222

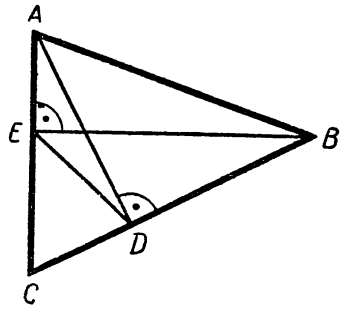


Рис. 223

818. $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ (прямоугольные и C — общий угол, рис. 223); $\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{CE}$, т. е. стороны, заключающие общий угол C, пропорциональны, значит, $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

819. I способ (рис. 224)

1) $\triangle KFN \sim \triangle AFC$; $AC = 3$; $MN = 1{,}5$; $KN = 0{,}75$; $AC : KN = AF : KF = 3 : 0{,}75 = 4 : 1$; отсюда $AK : AF = 3 : 4$.

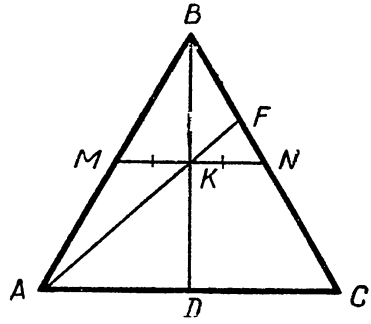


Рис. 224

2) $\triangle AKD$; $AD = 1{,}5$; $KD = 0{,}5BD = 0{,}75\sqrt{3}$; AK найдем по теореме Пифагора: $AK = 0{,}75\sqrt{7}$; $AK : AF = 3 : 4$; значит, $AF = \sqrt{7}$.

II способ

1) $\triangle KFN \sim \triangle AFC$; $\frac{FN}{FC} = \frac{KN}{AC}$; $\frac{FN}{FN + NC} = \frac{KN}{AC}$;

$\frac{FN}{FN + 1{,}5} = \frac{0{,}75}{3}$; $FN = 0{,}5$; $AN = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2) $AF = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{7}$.

820. 1) MD — биссектриса $\angle AMC$ (рис. 225), значит, $CD : AD = MC : AM$; ME — биссектриса $\angle AMB$, значит, $BE : AE = BM : AM$. А так как $MC = BM$, то $CD : AD = BE : AE$, а отсюда и $AC : AD = AB : AE$, т. е. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

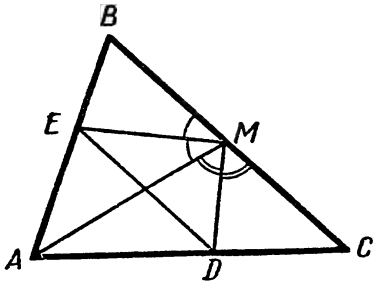


Рис. 225

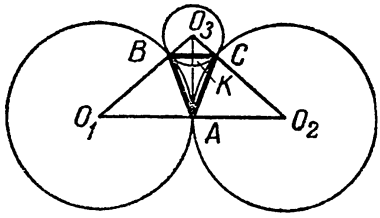


Рис. 226

2) Из подобия рассмотренных треугольников следует: $BC : ED = AC : AD = 8 : 5$; $BC = 16$ *см*, значит, $ED = 10$ *см*.

3) $\triangle EMD$; $\angle EMD = 180° \cdot 0{,}5 = 90°$, т. е. треугольник EMD прямоугольный, значит, $EM^2 + MD^2 = ED^2 = 100$.

821. (Рис. 226.) 1) $O_1O_2 = 6$; $O_1O_3 = 4$; $O_2O_3 = 4$; значит, $BC \parallel O_1O_2$ и $\triangle BCO_3 \sim \triangle O_1O_2O_3$ и коэффициент подобия равен 0,25. А так как $O_1O_2 = 6$, то $BC = 1{,}5$.

2) В $\triangle AO_1O_3$ $AO_3 = \sqrt{7}$, значит, $KO_3 = 0{,}25\sqrt{7}$, т. е. $AK = 0{,}75\sqrt{7}$.

3) $S_{ABC} = \frac{BC \cdot AK}{2} = \frac{9\sqrt{7}}{16}$ (*кв. ед*).

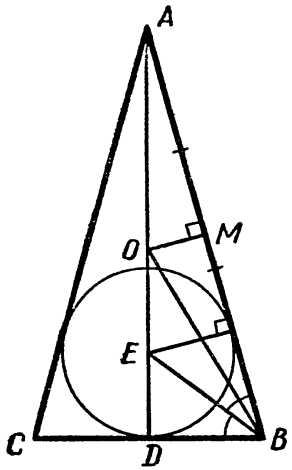


Рис. 227

822. 1) Пусть AO — радиус данной окружности (рис. 227), а ED — радиус окружности, который требуется найти: $AO = R$; $BC = x$; $BD = \frac{x}{2}$; $AB = 2x$.

2) $\triangle ABD$; $AD = \frac{x\sqrt{15}}{2}$.

3) $2R : 2x = 2x : AD$; $AD = \frac{2x^2}{R}$; $\frac{x\sqrt{15}}{2} = \frac{2x^2}{R}$;

$x = \frac{R\sqrt{15}}{4}$.

4) $AD = \frac{15R}{8}$.

5) $\triangle ABD$, BE — биссектриса $\angle ABD$; $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{ED}$;

$2x : \frac{x}{2} = \frac{\frac{15R}{8} - r}{r}$; $r = \frac{3R}{8}$.

823. Проведем из центра меньшей окружности прямую BK, параллельную касательной DF (рис. 228). В треугольнике OBK: $\angle K = 90°$, $OK = OF - KF = 2$ *см*; $OB = OA + AB = 4$ *см*, значит, $\angle KBO = 30°$; $\angle C = \angle KBO = 30°$, $BD = 1$ *см*, значит, $BC = 2$ *см*, $AC = 3$ *см*, а из треугольника AEC находим, что $AE = 0{,}5AC = 1{,}5$ *см*.

Можно эту задачу решить, рассматривая подобие $\triangle BDC$ и $\triangle OFC$.

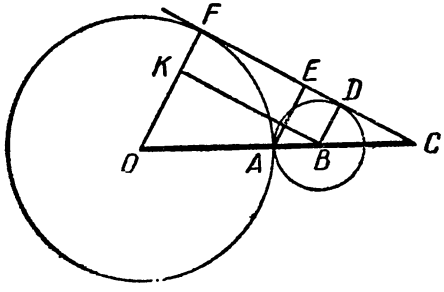


Рис. 228

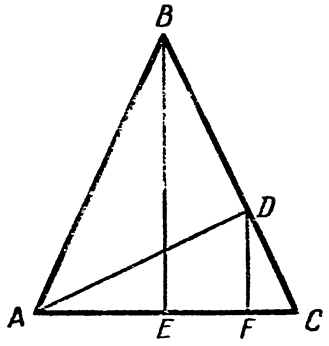


Рис. 229

824. (Рис. 229.) 1) $S_{ABD} : S_{ADC} = 3 : 1 = \frac{BD \cdot AD}{2} : \frac{CD \cdot AD}{2} = BD : CD$; $BD : CD = 3 : 1$.

2) $\triangle EBC \sim \triangle FDC$: $CF : CE = CD : BC = 1 : 4$; $CE = 24$, значит, $CF = 6$, а $AF = 42$.

3) $\triangle ADC$ прямоугольный; $DF^2 = AF \cdot FC$; $DF = 6\sqrt{7}$.

4) $S_{ADC} = \frac{AC \cdot DF}{2} = 144\sqrt{7}$ (*кв. ед.*).

Обозначим $CD = x$, тогда $BD = 3x$, $AB = 4x$. Из прямоугольного треугольника ABD найдем AD: $AD = \sqrt{16x^2 - 9x^2} = x\sqrt{7}$. $S_{ADC} = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{x\sqrt{7} \cdot x}{2} = \frac{x^2\sqrt{7}}{2}$; x^2 найдем из прямоугольного треугольника ADC, в котором $AC = 48$, значит, $x^2 = 288$.

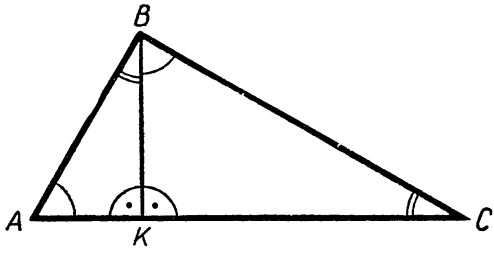


Рис. 230

825. Прямоугольные треугольники ABK и BKC подобны (рис. 230), так как $AK : BK = BK : KC$, значит, угол A равен углу KBC, а угол C равен углу ABK, следовательно, угол ABC равен 90°.

826. Через точку M общей хорды EF двух пересекающихся окружностей проведены в одной окружности хорда AB, а в другой — CD (рис. 231). Соединим A с C

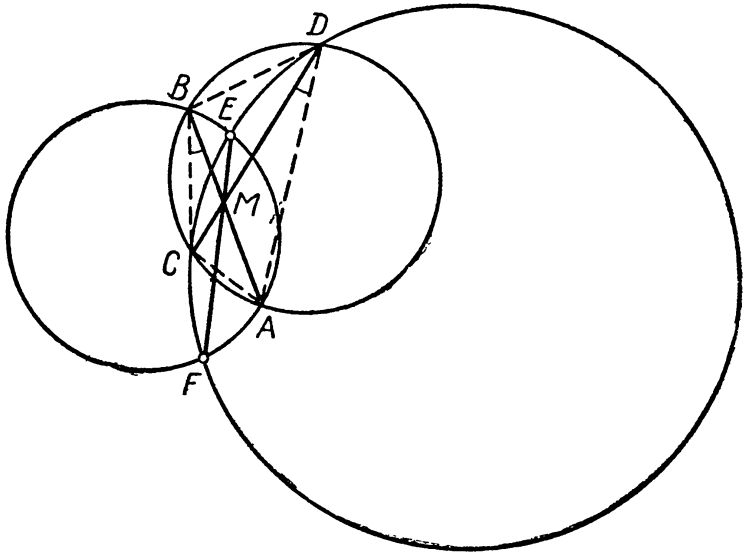


Рис. 231

и D, B с C и D. Надо доказать, что около четырехугольника $ACBD$ можно описать окружность. $AM \cdot MB = EM \cdot MF = CM \cdot MD$ по свойству хорд, пересекаю-

щихся внутри круга. Тогда в треугольниках AMC и BMD: $CM : MB = MA : MD$ и углы, заключенные между пропорциональными сторонами, равны, значит, $\triangle AMC \sim \triangle BMD$. Отсюда $\angle ABC = \angle CDA$. Проведем окружность через точки C, A и D. Эта окружность пройдет и через точку B. В самом деле, если бы точка B оказалась внутри окружности, то $\angle ABC$ должен быть больше $\angle ADC$; если вне окружности, тогда $\angle ABC < \angle ADC$. Остается одно: точка B лежит на окружности, проведенной через A, C и D.

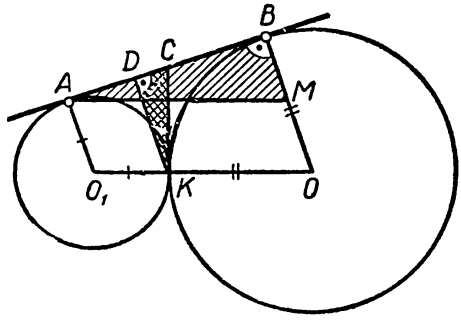


Рис. 232

827. 1) $AM \parallel OO_1$ (рис. 232); $DK \perp AB$; $CK \perp OO_1$. В $\triangle ABM$

$AM = R + r$; $BM = R - r$; $\angle ABM = 90°$;

$AB = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$.

2) $AC = CK = CB = \sqrt{Rr}$.

3) $\triangle ABM \sim \triangle CDK$ (перпендикулярность сторон), отсюда $KD : KC = AB : AM$; $KD = KC \cdot \frac{AB}{AM} = \sqrt{Rr} \times \times \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r} = \frac{2Rr}{R+r}$.

4) В $\triangle DKC$ $CD = \frac{\sqrt{Rr}(R-r)}{R+r}$ (по теореме Пифагора).

5) Тогда $AD = AC - CD = \frac{2r\sqrt{Rr}}{R+r}$.

6) $\triangle ADK$ — прямоугольный, $AK = \frac{2r\sqrt{R}}{\sqrt{R+r}}$. Аналогично, $BK = \frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R+r}}$.

828. (Рис. 233.)

I способ

1) $\triangle ABC$; $AB = BC = b$; $AC = b\sqrt{2}$.

2) $O_1O_3 = AC = b\sqrt{2}$.

3) $O_2B = AC = b\sqrt{2}$ (ABO_2C – квадрат).
4) $O_2B \perp O_1O_3$.

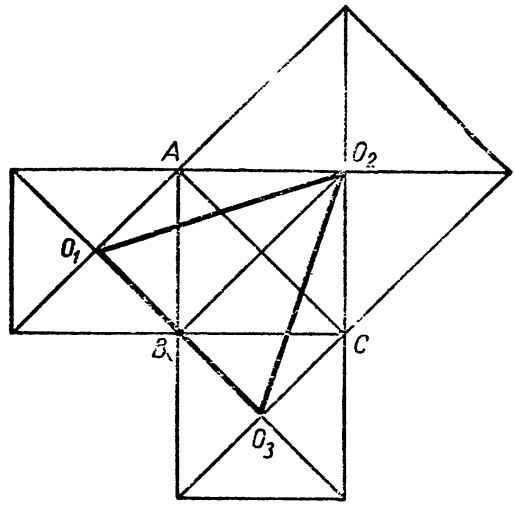


Рис. 233

5) $S_{O_1O_2O_3} = \dfrac{O_1O_3 \cdot O_2B}{2} = \dfrac{b\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2}}{2} = b^2$ (*кв. ед.*).

II способ

$\triangle O_1O_2B$ равновелик $\triangle ABO_2$, а $\triangle O_3O_2B$ равновелик $\triangle BCO_2$, значит, $S_{O_1O_2O_3} = b^2$.

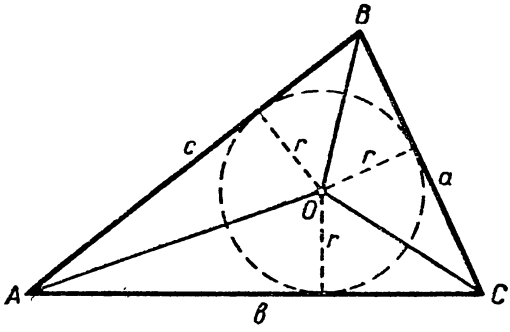


Рис. 234

829. $S_{AOC} + S_{AOB} + S_{BOC} = S_{ABC}$ (рис. 234.)

$$\frac{\frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2}}{S_{ABC}} = 1;$$

$$\frac{br}{2S_{ABC}} + \frac{cr}{2S_{ABC}} + \frac{ar}{2S_{ABC}} = 1;$$

$$\frac{br}{bh_2} + \frac{cr}{ch_3} + \frac{ar}{ah_1} = 1; \quad \frac{r}{h_2} + \frac{r}{h_3} + \frac{r}{h_1} = 1; \quad \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}.$$

830. Проведем $CE \perp AB$ (рис. 235).

$CDEF$ — искомый прямоугольник, так как взяв любую другую точку K на гипотенузе, получим прямоугольник, диагональ которого $CK > CE$.

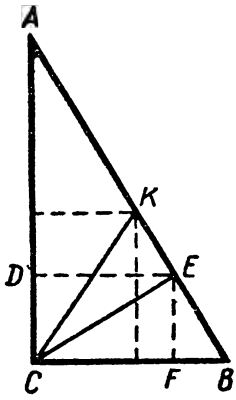


Рис. 235

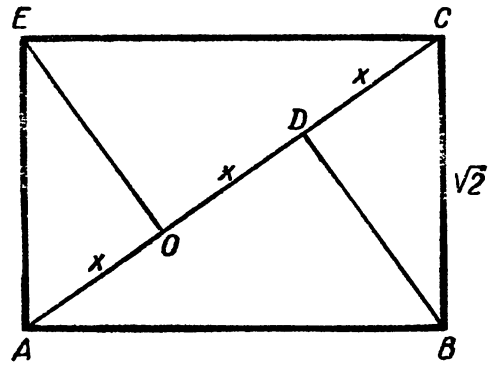


Рис. 236

831. I случай (рис. 236)

Пусть $BC = \sqrt{2}$; $AB = y$, тогда $EO \perp AC$; $BD \perp AC$; $AO = OD = DC = x$.

Из прямоугольного треугольника ABC:

$$\sqrt{2} = \sqrt{3x \cdot x}$$

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad y = \sqrt{3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}}} = 2.$$

II случай

Пусть $AB = \sqrt{2}$; $BC = y$; получим $y = 1$.

Ответ: 2 или 1.

834. (Рис. 237). $\frac{S_a}{S_c} = \frac{a^2}{c^2}$; $\frac{S_b}{S_c} = \frac{b^2}{c^2}$; $\frac{S_a}{S_c} + \frac{S_b}{S_c} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$; $\frac{S_a + S_b}{S_c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$; $\frac{S_a + S_b}{S_c} = 1$; $S_a + S_b = S_c$.

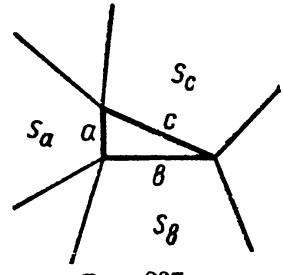


Рис. 237

837. 1) $AB + CD = BC + AD$ (свойство сторон описанного четырехугольника), $AB = CD$ (рис. 238).

2) $BE \perp AD$; $BE = \frac{1}{2} AB$ ($\angle A = 30°$).

3) $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE = \frac{AB + CD}{2} \cdot \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AB^2$;

$Q = \frac{1}{2} AB^2$; $AB = \sqrt{2Q}$.

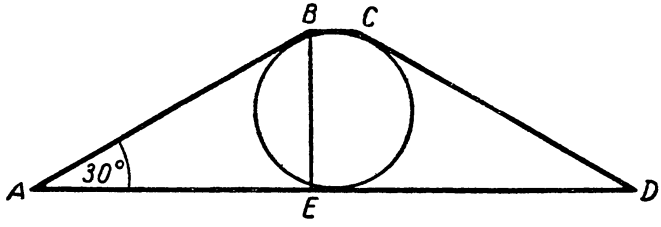


Рис. 238

838. 1) Пусть $BC = a$, тогда $AB = 2a$, $AC = a\sqrt{3}$ (рис. 239).

2) Так как AD — биссектриса $\angle CAB$, то $CD : BD = AC : AB = \sqrt{3} : 2$.

3) $S_1 : S_2 = CD^2 : BD^2 = 3 : 4$, где S_1 — площадь многоугольника, построенного на CD, а S_2 — площадь многоугольника, построенного на BD.

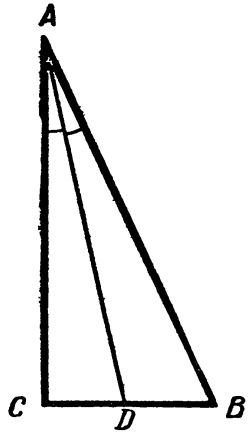


Рис. 239

839. I способ (рис. 240).

Пусть высота трапеции $EBCF$ равна H_1, а высота трапеции $AEFD$ равна H_2; искомый отрезок $EF = x$.

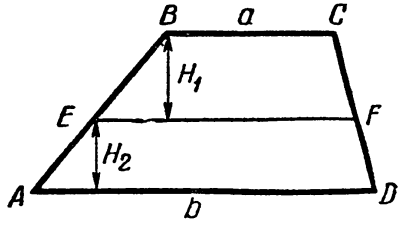


Рис. 240

Площади этих трапеций равны, значит, $S_1 = \frac{a + x}{2} \cdot H_1 = \frac{b + x}{2} \cdot H_2 = S_2$.

А площадь данной трапеции равна: $S=\frac{a+b}{2}(H_1+H_2)$, отсюда $H_1+H_2=\frac{2S}{a+b}$; $H_1=\frac{2S_1}{a+x}$; $H_2=\frac{2S_2}{b+x}$; $\frac{2S}{a+b}=$ $=\frac{2S_1}{a+x}+\frac{2S_2}{b+x}$; так как $S=2S_1=2S_2$, то $\frac{2S}{a+b}=$ $=\frac{S}{a+x}+\frac{S}{b+x}$; $\frac{2}{a+b}=\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}$; $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

II способ (рис. 241)

$\frac{(x+a)}{2}H_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+b)\cdot H}{2}$; $x+a=\frac{b+a}{2}\cdot\frac{H}{H_1}$; $\frac{b-a}{x-a}=\frac{H}{H_1}$;

$x+a=\frac{b+a}{2}\cdot\frac{b-a}{x-a}$; $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

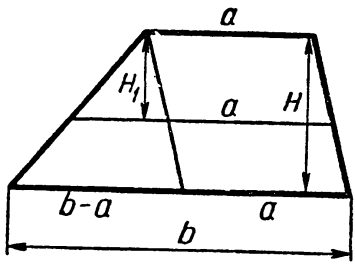


Рис. 241

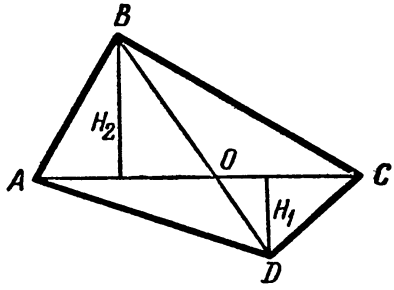


Рис. 242

840. (Рис. 242.) Пусть $S_{AOB}=S_1$; $S_{BOC}=S_2$; $S_{DOC}=S_3$; $S_{AOD}=S_4$ и S_1; S_2; S_3; S_4 — целые числа.

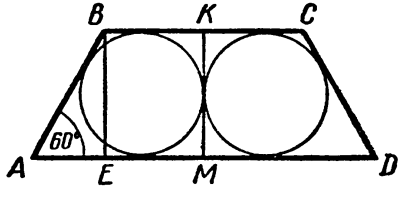


Рис. 243

$S_1=\frac{AO\cdot H_2}{2}$; $S_2=\frac{OC\cdot H_2}{2}$;

$S_3=\frac{OC\cdot H_1}{2}$; $S_4=\frac{AO\cdot H_1}{2}$;

$S_1\cdot S_3=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot H_2\cdot\frac{1}{2}\times$

$\times OC\cdot H_1=S_2\cdot S_4$;

$S_1\cdot S_2\cdot S_3\cdot S_4=(S_1\cdot S_3)^2$.

841. (Рис. 243.) 1) $BE=\sqrt{3}$ (из $\triangle ABE$), $BE=KM$.

2) $AB+KM=BK+AM=2+\sqrt{3}$.

3) $S_{ABKM}=\frac{BK+AM}{2}\cdot BE=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}$.

4) $S_{ABCD}=2S_{ABKM}=(2+\sqrt{3})\sqrt{3}=3+2\sqrt{3}$.

842. 1) $BM = 0{,}5$; $AF = AK$; $BF = BM$ (рис. 244).

2) $\triangle ABE$; $AB^2 = AE^2 + BE^2$; если $AK = x$, то $(x + 0{,}5)^2 = 4 + (x - 0{,}5)^2$; отсюда $x = 2$.

3) $AB = AF + FB = 2{,}5$.

4) $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE = AB \cdot BE = 5$.

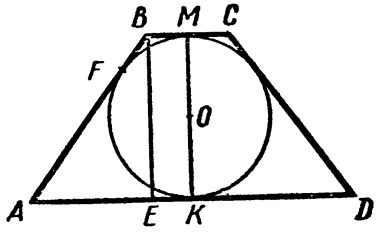


Рис. 244

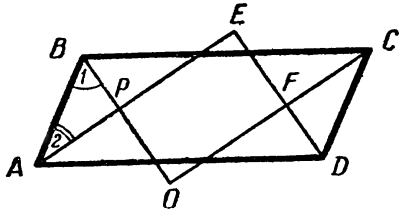


Рис. 245

843. 1) $BO \perp AE$ как биссектрисы внутренних односторонних углов при $BC \parallel AD$ и секущей AB, значит, $\angle BPA = 90°$ и $\angle EPO = 90°$ (рис. 245). Аналогично можно показать, что все углы четырехугольника $PEFO$ прямые, т. е. $PEFO$ — прямоугольник.

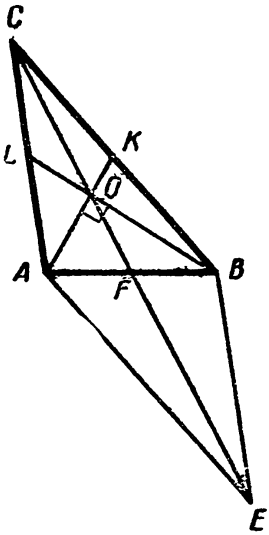


Рис. 246

2) $\triangle APB$; $BP = b \sin\frac{\alpha}{2}$.

3) $\triangle BOC$; $BO = a \sin\frac{\alpha}{2}$.

4) $PO = (a - b) \sin\frac{\alpha}{2}$.

5) Аналогично $OF = OC - CF = (a - b) \cos\frac{\alpha}{2}$.

6) $S_{PEFO} = (a - b)^2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}$.

844. 1) Пусть $AC = b$, $BC = a$ медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны, CF — третья медиана. $\triangle ABO$ прямоугольный, значит, $OF = 0{,}5AB$; $CF = 1{,}5AB$ (рис. 246).

2) Продолжим CF на отрезок EF, равный CF, и соединим точки A и B с точкой E; получим параллелограмм $AEBC$, в котором: $CE^2 + AB^2 = 2(AC^2 + BC^2)$, откуда $AB = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$.

845. 1) Пусть BO — радиус описанного круга; если $KB = 2$, то $BO = 3$, а $OK = 1$ (рис. 247).

2) $\triangle AOK$; $AK = 2\sqrt{2}$, так как $AO = 3$.

3) $\triangle ABK$; $AB = 2\sqrt{3}$.

4) $AC : AB = 4\sqrt{2} : 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

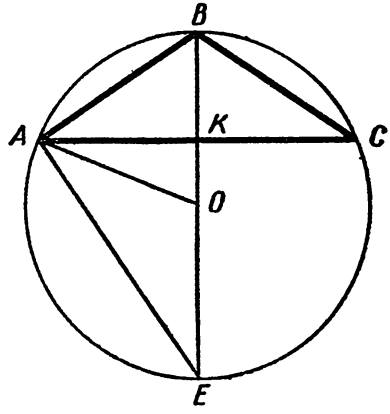


Рис. 247

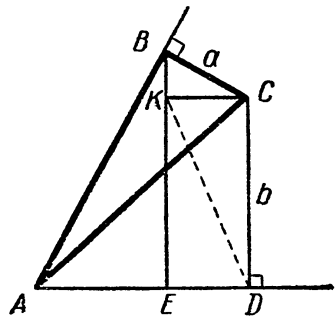


Рис. 248

846. I способ (рис. 248).

1) $\triangle BKC$; $BK = 0{,}5a$; $KC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2) $BE = 0{,}5a + b$.

3) $\triangle ABE$; $AE = BE \cdot \operatorname{ctg} 60° = \frac{a + 2b}{2\sqrt{3}}$.

4) $AD = AE + ED = \frac{a + 2b}{2\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a + b}{\sqrt{3}}$.

5) $\triangle ACD$; по теореме Пифагора: $AC = \frac{2\sqrt{a^2 + ab + b^2}}{\sqrt{3}}$.

II способ

Около $ABCD$ можно описать окружность, так как $\angle B + \angle D = 180°$ (диаметр окружности AC). Обозначим радиус окружности через R. Соединим точки B и D. Это будет хорда, стягивающая дугу в 120°. Из $\triangle BDC$ найдем $BD = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$, а с другой стороны $BD = R\sqrt{3}$; вычислив R, определим $AC = 2R = \frac{2\sqrt{a^2 + ab + b^2}}{\sqrt{3}}$.

847. 1) $KM \perp AC$; $ML \perp BC$; $KMLC$ — квадрат (рис. 249).

2) Пусть $ML = x$; тогда $BL = 5 - x$; обозначим $\angle MBL = \beta$.

3) $\triangle BML$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{BL}{ML}$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{5-x}{x} = \frac{5}{x} - 1$.

4) $\triangle AKM$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AK}{KM}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3-x}{x}$; отсюда $x = \frac{3}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$.

5) $\operatorname{ctg}\beta = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}\operatorname{ctg}\alpha$.

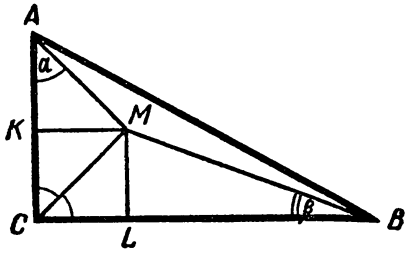


Рис. 249

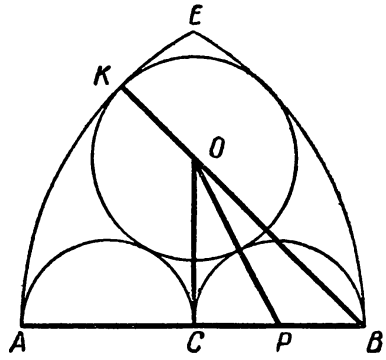


Рис. 250

848. 1) $BK = AB = a$; $KO = x$ (рис. 250); тогда $BO = KB - KO = a - x$.

2) $\triangle BOC$; $BC = 0{,}5a$;

$$OC^2 = (a-x)^2 - \frac{a^2}{4}. \quad (1)$$

3) $\triangle OCP$; $CP = \frac{a}{4}$, $OP = x + \frac{a}{4}$;

$$OC^2 = \left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{16}. \quad (2)$$

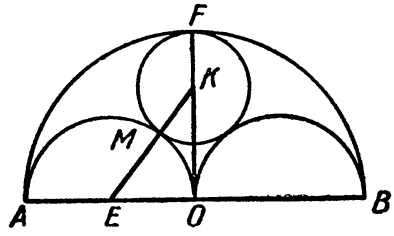


Рис. 251

Из (1) и (2) получим: $x = 0{,}3a$; $KO = 0{,}3a$; а значит, $OC = \frac{a\sqrt{6}}{5}$.

849. I способ (рис. 251).

1) $AE = a$; $FK = x$.

2) $\triangle EKO$; $KO = \sqrt{EK^2 - EO^2} = \sqrt{(a+x)^2 - a^2} = \sqrt{2ax + x^2}$.

3) $FO = KO + KF$; $FO = AO = 2a$; $2a = \sqrt{2ax + x^2} + x$;
$(2a - x)^2 = (\sqrt{2ax + x^2})^2$; $4a^2 = 6ax$; $a \neq 0$, $x = \frac{2a}{3}$.

II способ*) (рис. 252)

$OA = R$; $O'A' = r$; для нахождения точки T проводим AA'. $\triangle ATO$ равнобедренный, значит, $\angle A = \angle T$. Продолжим OT и найдем центр O'.

$\triangle A'O'T$ равнобедренный, так как $\angle A'TO' = \angle T$ и $\angle TA'O' = \angle A$ (внутренние накрест лежащие углы.) Итак, $O'T = O'A'$ и, значит, O' — центр искомой окружности.

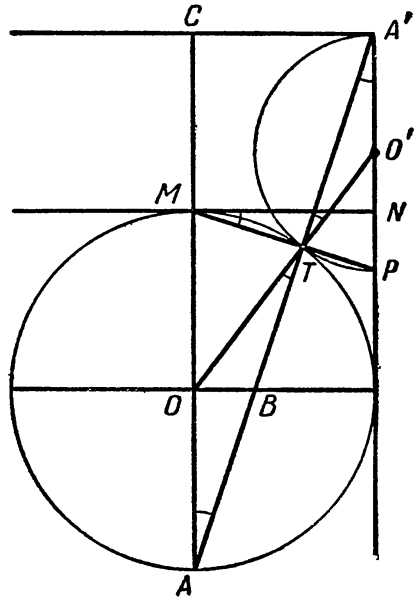


Рис. 252

В $\triangle AOB$ $OB = \frac{1}{3} OA$, так как $\triangle AOB \sim \triangle ACA'$ и $C'A = \frac{1}{3} AC$.

Итак, $OB = \frac{1}{3} R$.

Но $\triangle AOB = \triangle MPN$, так как $MN = AO$ и $\angle M = \angle A$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами).

Следовательно, $NP = OB = \frac{1}{3} R$.

$A'P = A'N + NP$;

$2r = R + \frac{1}{3} R = \frac{4R}{3}$.

Следовательно, $r = \frac{2R}{3}$.

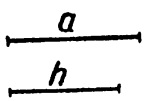
850. Построим хорду AB, равную боковой стороне трапеции a (рис. 253). На AB как на диаметре построим окружность. С центром в точке B и радиусом h проводим дугу до пересечения с построенной окружностью в точке C. Точки A и C соединим и AC продолжим до

---

*) Решение предложено А. И. Фетисовым.

пересечения с данной окружностью в точке D. Из B проведем $BE \parallel AD$. Трапеция $ABED$ искомая.

851. (Рис. 254.) Соединим центры данных окружностей O_1 и O_2 и точку M с центром той окружности, на которой она находится (O_2). От точки M на MO_2 отложим отрезок, равный радиусу другой окружности, и полученную точку K соединим с O_1. К отрезку O_1K проведем срединный перпендикуляр до пересечения с O_2M в точке O_3. O_3M — радиус искомой окружности, а O_3 — ее центр.



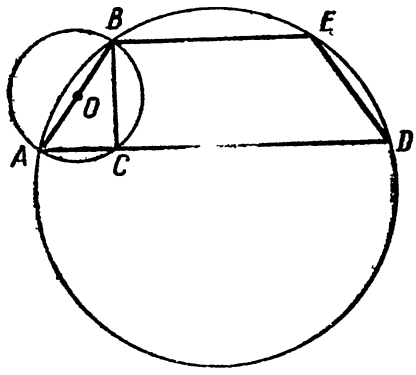


Рис. 253

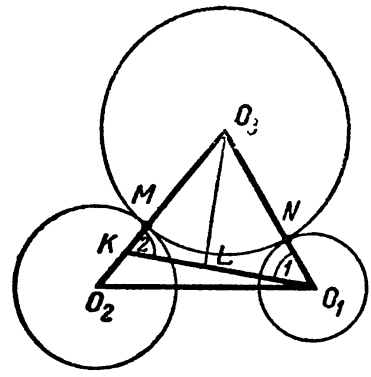


Рис. 254

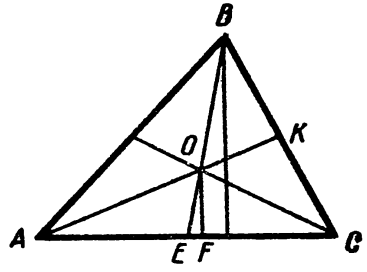


Рис. 255

852. 1) Строим прямоугольный треугольник AOF по катету $OF = \frac{1}{3} H_b$ и гипотенузе $AO = \frac{2}{3} m_a$ (рис. 255).

2) Продолжим AO до точки K на $OK = \frac{1}{3} m_a$.

3) С центром в точке O радиусом, равным $\frac{2}{3} m_c$, проводим дугу до пересечения с AF в точке C. Соединяем K с C и продолжаем на $BK = KC$. $\triangle ABC$ искомый.

853. Анализ.

1) Пусть $\triangle ABC$ искомый (рис. 256), в нем: $AC = b$, $BC = a$ и CE—биссектриса, равная l_c. Построим точку B_1, симметричную точке B относительно CE, и проведем $EE_1 \parallel BB_1$, тогда $B_1C = a$ и $AB_1 = b - a$.

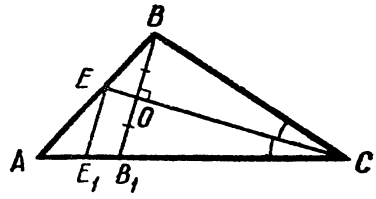


Рис. 256

2) Так как CE — биссектриса, то $AE : EB = AC : BC = b : a$. $EE_1 \parallel BB_1$, значит, $AE_1 : B_1E_1 = AE : EB = b : a$; отсюда $AE_1 : B_1E_1 = b : a$.

3) Задача сводится к тому, чтобы построить отрезок $AB_1 = b - a$, разделить его точкой E_1 в отношении b к a и построить прямоугольный треугольник E_1EC.

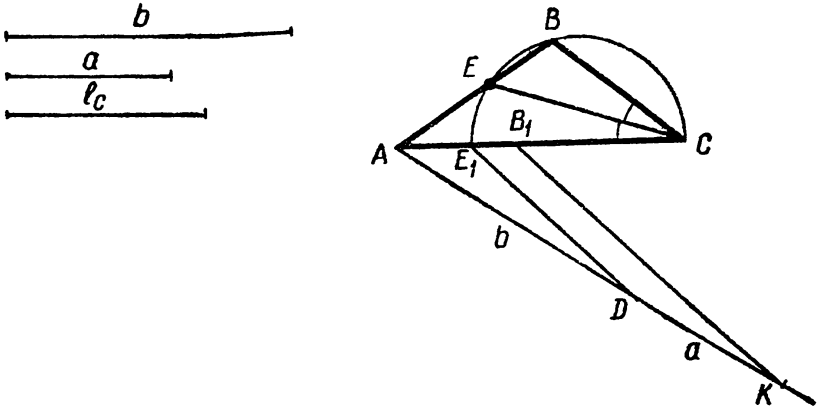


Рис. 257

Построение. (Рис. 257.) 1) $AC = b$; $CB_1 = a$; значит, $AB_1 = b - a$. Отрезок AB_1 разделим в отношении b к a; получим: $AE_1 : E_1B_1 = b : a$.

2) На CE_1 как на диаметре строим полуокружность. С центром в точке C радиусом, равным l_c, проводим дугу до пересечения с окружностью в точке E. A соединяем с E.

3) Строим угол ECB, равный ACE и сторону a. $\triangle ABC$ искомый.

854. Пусть $FM = r$, тогда $FK = 2r$, $DE = 2r$ (рис. 258). $\triangle ADF$; $\angle FAD = 30°$; $AD = DF \operatorname{ctg} 30° = r\sqrt{3}$; $EC = r\sqrt{3}$;

$AC = AD + DE + EC$; $a = 2r\sqrt{3} + 2r$; $2r(\sqrt{3}+1) = a$.

$$r = \frac{a}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

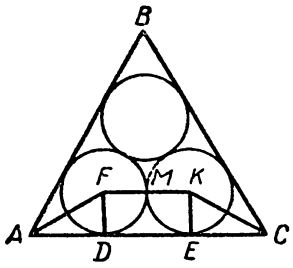


Рис. 258

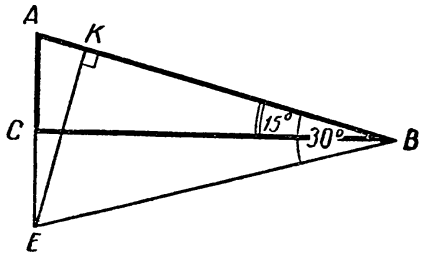


Рис. 259

855. Пусть c — гипотенуза $\triangle ABC$, AC и BC — катеты (рис. 259).

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}.$$

Построим $\triangle BCE = \triangle ABC$; $EK \perp AB$. А так как $\angle ABE = 30°$, то $EK = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} c$.

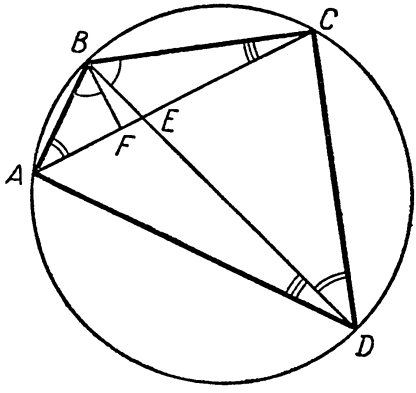


Рис. 260

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB \cdot KE}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot c}{4} = \frac{c^2}{8}.$$

Значит,

$$\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{c^2}{8}; \quad AC \cdot BC = \frac{c^2}{4} = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

856. Строим угол ABF, равный углу CBD (рис. 260).

1) Из подобия треугольников ABF и BCD:

$$AB : BD = AF : CD; \quad AB \cdot CD = BD \cdot AF.$$

2) $\triangle ABD \sim \triangle BFC$

$$AD : FC = BD : BC;$$
$$AD \cdot BC = FC \cdot BD.$$

3) $AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot AF + FC \cdot BD =$
$= BD(AF + FC) = BD \cdot AC.$

Галина Ивановна Зубелевич

СБОРНИК ЗАДАЧ МОСКОВСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Редактор *И. С. Комиссарова.* Художник *Б. Л. Николаев*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *Л. Я. Медведев*
Корректоры *К. А. Иванова, Н. М. Данковцева*

Сдано в набор 11/XII 1970 г. Подписано к печати 27/IX 1971 г. 84×108¹/₃₂
Печ. л. 9,5. Усл. л. 15,96. Бумага типографская № 2. Уч.-изд. л. 13,09
Тираж 200 тыс. экз. Заказ 1069. (Тем. пл. 1971 г. № 328—70)

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.
Цена без переплета 35 коп. Переплет 10 коп.